




LIUTI LIXUE
JICHU YU YINGYONG

流体力学 基础与应用

(修订版)

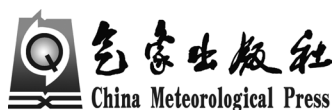
魏岗 关晖 编著

 气象出版社
China Meteorological Press

流体力学基础与应用

(修订版)

魏 岗 关 晖 编著



内 容 简 介

本教材系统地阐述了流体力学的基本概念、基本原理和基本方法,主要包括:绪论、流体运动学基础、理想流体动力学基础、流体涡旋运动基础、流体波动理论基础和黏性流体动力学基础。教材力求做到突出基础、强调应用、注重实践。教材内容编排科学合理,叙述精练准确,有利于读者自主学习和教师因材施教。书后列出了矢量分析、笛卡儿张量和正交曲线坐标系三个附录,以及常用专业词汇的中英文索引。

本教材可作为高等院校大气、海洋科学类专业本科生的基础课程教材,也可作为相关专业工程科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学基础与应用 / 魏岗, 关晖编著. — 修订本
— 北京: 气象出版社, 2018. 1

ISBN 978-7-5029-6625-6

I. ①流… II. ①魏… ②关… III. ①流体力学-高等学校-教材 IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 324328 号

LIUTI LIXUE JICHU YU YINGYONG

流体力学基础与应用(修订版)

出版发行: 气象出版社

地 址: 北京市海淀区中关村南大街 46 号

邮政编码: 100081

电 话: 010-68407112(总编室) 010-68408042(发行部)

网 址: <http://www.qxcbs.com>

E-mail: qxcbs@cma.gov.cn

责任编辑: 黄海燕 黄红丽

终 审: 吴晓鹏

封面设计: 博雅思企划

责任技编: 赵相宁

印 刷: 三河市百盛印装有限公司

开 本: 720 mm×960 mm 1/16

印 张: 18

字 数: 373 千字

版 次: 2018 年 1 月第 2 版

印 次: 2018 年 1 月第 2 次印刷

定 价: 48.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社发行部联系调换。

前 言

本教材是魏岗、关晖 2016 年出版的《流体力学基础与应用》一书的修订版,主要对全书进行了图表规范和勘误。原教材是在杨增普、魏岗等 1995 年出版的《流体力学》一书基础上,结合多年教学实践,以及学科在大气、海洋等应用领域的发展需求,编著而成。

流体力学应用于大气和海洋科学已有 100 多年的历史。一方面,流体力学学科面临重大的发展机遇,传统的理论方法、现代实验技术和先进 CFD(计算流体动力学)技术与工程及军事应用领域的相互融合对学科发展提出了更高要求;另一方面,流体力学课程教学面临着严峻挑战,尤其是军队院校人才战略工程正在由学历教育为主向任职教育为主转变,使得实际课堂教学课时压缩、知识消化理解周期变短,传统课程教学模式面临适应新转变的改革。为此,流体力学课程教材必须在体系和内容上做出相应的调整,在确保“基本概念、基本理论、基本技能”的教学质量前提下,要求在内容编排上更加科学合理、叙述精练准确,有利于读者自主学习和教师因材施教。

作为针对大气和海洋科学类本科教学基础教材,本书保持了原版的经典,兼顾了取材针对性、学科系统性和内容科学性,着重阐述流体力学的概念、原理和方法,做到突出基础、强调应用和注重实践。新版教材对传统结构体系进行了调整,将每章内容分为基础篇、应用例和实践题三个部分,每个部分具有相对独立性和可扩展性。基础篇阐述流体力学的知识点,应用例为对应主要知识点的典型例题,实践题为应用例的实践练习题。教学过程中,可根据不同专业对流体力学知识的需求,在各自部分增减相应内容。本书也可作为其他专业师生和工程科技人员的教学参考书。

全书共分为六章:第 1 章绪论,第 2 章流体运动学基础,第 3 章理想流体动力学基础,第 4 章流体涡旋运动基础,第 5 章流体波动理论基础,第 6 章黏性流体动力学基础。此外,每章结束都编写有本章小结,便于读者对本章基本要求的把握。新版教

材的学习需要具备微积分、矢量分析、线性代数、微分方程和复变函数论等数学基础知识,此外,还要用到张量和正交曲线坐标系概念。为方便阅读,已将矢量分析、笛卡儿张量和正交曲线坐标系的基本内容以附录形式编入本书,书末还列出了名词索引。

教材的修订主要由魏岗完成。关晖副教授负责第2章和第4章的修编,研究生杜辉、张原铭和陈祥瑞以及气象和海洋专业部分本科学员参加了书稿的录入工作,在此表示感谢。

限于作者水平,加上时间仓促,书中存在不当和谬误之处,恳请专家与读者批评指正。

作 者

2017年11月

目 录

前 言

第 1 章 绪 论	(1)
1.1 流体力学研究对象和研究方法	(1)
1.2 流体连续介质模型	(3)
1.3 流体黏性和可压缩性	(5)
1.4 流体力学发展简史	(7)
应用例	(12)
实践题	(13)
本章小结	(14)
第 2 章 流体运动学基础	(15)
2.1 流体运动描述方法与几何表示.....	(15)
2.2 连续性方程.....	(23)
2.3 流体微团运动.....	(28)
2.4 无旋运动和速度势.....	(33)
2.5 不可压缩流体平面运动和流函数.....	(37)
2.6 不可压缩流体平面无旋运动和复势.....	(40)
应用例	(47)
实践题	(57)
本章小结	(60)
第 3 章 理想流体动力学基础	(62)
3.1 流体上作用力.....	(62)
3.2 理想流体动量方程.....	(63)
3.3 理想流体能量方程.....	(68)
3.4 方程完备性和定解条件.....	(71)
3.5 不可压缩理想流体一维流动.....	(76)
3.6 特殊情形下欧拉方程积分.....	(77)
3.7 圆柱绕流.....	(79)
3.8 积分形式动量方程和动量矩方程应用.....	(84)

3.9 流体静力平衡·····	(86)
应用例·····	(91)
实践题·····	(106)
本章小结·····	(110)
第4章 流体涡旋运动基础·····	(112)
4.1 涡旋运动概念·····	(112)
4.2 涡旋运动学性质·····	(115)
4.3 涡旋动力学性质·····	(117)
4.4 涡量场确定速度场·····	(127)
4.5 兰金组合涡·····	(131)
应用例·····	(134)
实践题·····	(138)
本章小结·····	(140)
第5章 流体波动理论基础·····	(142)
5.1 波动基本概念·····	(142)
5.2 重力表面波·····	(144)
5.3 平面重力表面波·····	(148)
5.4 波群和群速度·····	(157)
5.5 波动能量及其传递·····	(160)
5.6 浅水长波·····	(165)
5.7 分层流与内波·····	(168)
应用例·····	(174)
实践题·····	(180)
本章小结·····	(182)
第6章 黏性流体动力学基础·····	(184)
6.1 应力张量与形变率张量·····	(184)
6.2 黏性流体动力学基本方程和边界条件·····	(190)
6.3 黏性流动基本特性·····	(196)
6.4 不可压缩黏性流体层流精确解·····	(199)
6.5 相似理论与量纲分析·····	(203)
6.6 不可压缩黏性流体小雷诺数流动近似解·····	(209)
6.7 不可压缩黏性流体大雷诺数流动——层流边界层理论·····	(213)
6.8 湍流引论·····	(219)
应用例·····	(229)

实践题.....	(237)
本章小结.....	(240)
实践题参考答案.....	(244)
参考文献.....	(250)
附录 A 矢量分析概述.....	(251)
附录 B 笛卡儿张量简介.....	(258)
附录 C 正交曲线坐标系.....	(270)
名词索引.....	(277)

第 1 章 绪 论

流体力学是力学的分支,是一门基础性强、应用性广的学科。本章首先阐明流体力学的研究对象和研究方法,然后讨论流体连续介质模型、流体黏性和可压缩性,最后介绍流体力学的发展简史。

1.1 流体力学研究对象和研究方法

1.1.1 流体力学研究对象

地球表面 71% 覆盖着海水,它是一种液体;整个地表覆盖着一层空气,空气是由多种气体混合而成的。液体和气体是自然界中人们最具感性认识的两类物质,它们具有共同的性质——易流动性,故统称为流体。所谓易流动性,是指当液体和气体处于静止时不能抵抗切向力。在切向力的作用下,液体和气体将发生任意大的变形,直到切向力消失为止。这种不断变形的运动称为流动。正是由于流体的易流动性,所以流体没有固定的形状。

与流体不同的另一类物质是固体,它对外力的响应则是采取另外一种形式,即当切向力作用于固体时,固体在弹性限度范围内将发生相应的形变以产生切向应力来抵抗外力,使之达到平衡状态,所以固体具有一定的形状。例如钢铁、岩石和玻璃等都是固体,它们在常温下都具有一定的形状。

流体和固体这两种有着完全确定而又互不相同力学性质的物质构成了力学的两大分支学科,即流体力学和固体力学。力学是研究客观实体的宏观机械运动及其相互作用规律的一门学科,顾名思义,流体力学是研究流体机械运动规律以及流体与流体、流体与固体之间相互作用规律的一门学科。

必须说明,流体和固体之分并不是绝对的。实际上,有些物质如某些树胶、油漆等,长期静置后会呈现固态的性质,如果加以摇晃或搅拌,又会显示出流动性;更有甚者,某些高分子聚合物会同时呈现流体和固体双重力学的特性,于是就有了黏弹性体和黏塑性体等概念,出现了黏弹性力学和黏塑性力学等新变形体的力学分支。

流体力学与经济建设、国防生产以及日常生活有着密切的联系。例如,研究大气和海洋的运动,可以做好天气和海洋预报,以便为农业、渔业、航空和航海等服务;研究各种飞行体和水面及水下物体的运动,了解它们的气动和水动力学性能,可以设计

出阻力小、稳定性高的飞机、导弹、舰船和潜艇等；研究河流、渠道和各种管路内的流动，掌握它们的运动规律，可以获得耗能少、安全性高的工程设计。此外，油气田的开发、地下水的利用、机械的润滑、动力设备的改进等，都与流体力学密切相关。近半个多世纪以来，流体力学与其他学科相结合，形成了许多新的边缘学科，大大地充实和扩展了流体力学的研究和应用领域。

1.1.2 流体力学研究方法

流体力学的研究方法分为四个方面：现场观测、实验室模拟、理论分析和数值计算。

现场观测方法是对自然界固有的流动现象或已有工程的全尺寸流动现象，利用各种仪器进行系统观测，从而总结出流体运动的规律，并借以预测流动现象的演变。例如，天气、海浪等现象的观测和预报，舰船在海洋中航行的各种设计指标的实际效果等，都是通过现场观测进行的。由于现场流动现象的发生往往不能控制，发生条件几乎不可能完全重复出现，会影响到对流动现象和规律的研究；此外，现场观测常常要花费大量物力、财力和人力。

实验室模拟方法是通过建立实验室，使实际流动现象能在完全相同或相似条件再现，以便观察和测量。自然界有些流动现象难以靠理论计算解决，而有些则不可能完成原型实验（成本太高或规模太大）。模型实验是指根据理论指导，把研究对象的尺度改变（放大或缩小），利用模型实验所得数据，再用相似理论换算出原型数据。实验室模拟可以对发生或没有发生的现象（如待设计的工程、机械等）进行观察，使之得以再现或改进。流体力学离不开实验，尤其是对流动新现象的认识，它能够揭示新现象的特点和主要趋势，有助于形成概念，还可检验新理论的正确性。

理论分析方法是根据流体运动的普遍规律，如质量守恒、动量守恒、能量守恒等，利用数学分析的手段，研究流体的运动，解释已知的现象，预测可能发生的结果。理论分析的关键步骤如下：通过对流体物理性质和流动特性的科学抽象，提出合理的力学模型；再根据机械运动的普遍规律，建立控制流体运动的完备方程组，将具体的流动问题转化为数学问题；在相应的定解条件下求解。理论分析方法的关键在于建立力学模型，并能运用数学方法求出理论结果，达到揭示流体运动规律的目的。

数值计算方法是通过对计算机对流体力学中的控制方程进行数值求解。数值研究的一般过程为：采用各种离散方法，如有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法、谱分析法等，建立各种数值计算模型，编制计算程序，通过计算机对控制流体运动的数学物理方程（多为偏微分方程）进行数值计算和数值试验，再将计算结果与实验室实验或理论解析结果比较，最终获得定量描述流场的数值解。数值计算方法的优点是能够计算理论分析无法求解的流动问题，能够对许多实验室模拟无法完成的实验

进行数值模拟,且十分经济。但数值计算方法毕竟是一种近似求解方法,适用范围受数学模型的正确性、计算精度和计算机性能等的限制。数值计算方法已成为流体力学现代分析手段中发展最快的方法之一,并已发展成专门的分支学科——计算流体力学。

解决流体力学问题时,现场观测、实验室模拟、理论分析和数值计算几方面是相辅相成的。实验需要理论指导,才能从分散的、表面上无联系的现象和实验数据中得出规律性的结论。反之,理论分析和数值计算也要依靠现场观测和实验室模拟给出物理图案或数据,以建立流动的力学模型和数学模式;最后,还须依靠实验来检验这些模型和模式的完善程度。此外,实际流动往往异常复杂(例如湍流),理论分析和数值计算会遇到巨大的数学和计算方面的困难,得不到具体结果,只能通过现场观测和实验室模拟进行研究。

1.2 流体连续介质模型

处于流体状态的物质无论是液体还是气体,都是由大量的、不断地做无规则热运动的分子所组成。例如,在标准状况下,一个立方厘米的气体包含 2.7×10^{19} 个分子,分子的有效直径约为 10^{-8} cm,通过简单计算不难得出,所有分子的体积之和约为十万分之一立方厘米。可见分子间存在着间隙,且间隙尺寸大于分子本身,它导致流体物理量在空间分布的不连续性。同时,由于分子的随机运动,还导致任一空间点上流体物理量对时间的不连续性。所以从微观的角度来看,流体内部是不连续的,流体的物理量分布在空间和时间上也是不连续的。

流体力学并不研究个别分子的运动,而是研究流体的宏观特性,即大量分子的统计平均特性。它所讨论的流动特征尺度往往比分子平均自由程(例如,作为气体分子运动的尺度,在标准状况下空气分子的平均自由程约为 6.3×10^{-6} cm)大得多,用仪器测量或用肉眼观察到的流体结构和运动明显地表现出连续性。所以,在流体力学中完全有理由把所研究的流体看成是连绵不断的连续物质,称为连续介质。

所谓连续介质模型就是把流体抽象为大量流体质点所组成的介质,这些流体质点一个挨着一个,充满着流体所占有的空间而没有任何间隙。也就是说,流体力学认为流体是由连续分布的流体质点所组成。

流体质点指的是微观上充分大、宏观上充分小的分子团。一方面,流体质点的尺度和所讨论问题的特征尺度相比较已足够微小,从宏观上来看,完全可以将它看成是无体积的质点;另一方面,每个流体质点在微观上又是充分大,包含很多分子,从而都具有对大量分子运用统计方法才能表征出来的宏观物理量,如密度、温度等,为了建立流体质点的确切概念,接下来观察一个实验结果。

取包含点 $C(x, y, z)$ 的微体积元 $\Delta\tau$, 体积内的流体质量为 Δm , 则体积元中的平均密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

为了确定点 C 处的流体密度, 应该尽量缩小微体积元 $\Delta\tau$ 。现在的问题是: 所取微体积元究竟能小到什么程度? 取不同大小的 $\Delta\tau$, 测量其中的质量 Δm , 计算出平均密度 $\bar{\rho}$, 图 1.1 表明了平均密度 $\bar{\rho}$ 随微体积元 $\Delta\tau$ 的变化情况。

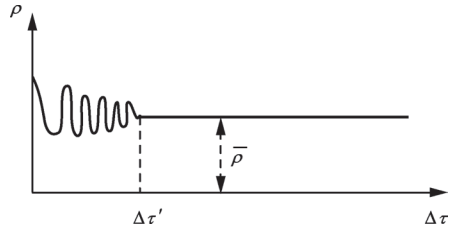


图 1.1 流体密度随体积的变化

从图中曲线可知, $\Delta\tau$ 向 $\Delta\tau'$ 逐渐收缩过程中, 其平均密度逐渐趋近一个稳定的极限值 ρ 。但是, 当 $\Delta\tau$ 收缩到比 $\Delta\tau'$ 更小时, $\Delta\tau$ 内的分子数目已经很少, 由于分子无规则运动, 随机进入和飞出的分子数不能随时保持平衡, 从而引起平均密度 $\bar{\rho}$ 的涨落现象, 即随时间发生不规则变化, 不再存在一个确定值。由此可见, $\Delta\tau'$ 是一种特征体积, 它是 $\Delta\tau$ 的极限值, 流体在某点处的物理特性, 实质上是包含该点的微体积元 $\Delta\tau'$ 内大量分子的统计平均特性, 把体积为 $\Delta\tau'$ 的分子团称为流体质点。这样, 流体质点的密度就可以定义为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau'} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

它就是流体质点所在位置 $C(x, y, z)$ 处的密度。由于 $\Delta\tau'$ 很小, 宏观上相当于一个点, 即体积为零, 因而流体质点的密度又可以表达为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

上述两种表达式是等价的。以上讨论对于其他物理量也适用。

综上所述, 流体的连续介质模型要求所讨论问题的特征长度要远大于流体质点的特征长度, 而流体质点的特征长度又必须大于分子运动的特征长度。对于气体, 引入分子平均自由程 $\bar{\lambda}$ 和流动的特征长度 L 之比, 并称之为克努森(Kundson)数, 记为 Kn , 即

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L}$$

只要满足 $Kn \ll 1$, 气体的连续介质模型就成立。从表 1.1 可以看出, 当取特征长度 $L = 10 \text{ cm}$ 时, 对于 50 km 左右的高空, 大气的连续介质模型一般是成立的, 至于更高的高空, 由于分子平均自由程比较大, Kn 不能保持远小于 1, 大气就不能再看作是连续介质, 而是非连续的稀薄气体。不过, 如果研究的是大范围问题, 例如特征长度

L 取 10^6 m, 那么即便是 150 km 高空的大气, 也可以视为连续介质。所以连续介质是一个具有相对意义的概念。

表 1.1 不同高度层大气的 Kn 数

海拔高度(km)	$\bar{\lambda}$ (cm)	Kn
0	$<10^{-5}$	$<10^{-6}$
50	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-3}$
100	10	~ 1
150	10^4	$\sim 10^3$
200	10^7	$\sim 10^6$

连续介质模型的引入将大量离散的分子运动问题转化为连续分布的流体质点问题, 因而在每个空间点和每个时刻都有确定的物理量, 这就提供了流体物理量连续分布的可能性。在连续介质模型的基础上, 假定流体物理量是空间位置和时间的连续可微函数, 只有在个别点、线和曲面上允许不连续。由这一假定所得到的结果与实验结果相吻合。因此, 可以充分利用数学分析工具来研究流体的运动。所以, 连续介质模型及上述假定是流体力学中最根本的假定, 本书所讨论的结果都是以连续介质模型为前提的。

1.3 流体黏性和可压缩性

除了前面提到的流体易流动性外, 真实流体还具有黏性、扩散性、热传导性及可压缩性。黏性、扩散和热传导都是分子的输运现象, 其中动量输运表现为黏性现象, 质量输运表现为扩散现象, 能量输运表现为热传导现象, 三种现象具有相似的宏观特性和微观结构。这里着重讨论流体的黏性和可压缩性。

1.3.1 黏性

前面已经讲过, 流体在静止时不能承受切向力, 但是当流体内部相邻两层间发生相对运动时就会出现相互约束作用的切向应力来抵抗相对运动, 快的一层给慢的一层以拉力, 而慢的一层给快的一层以阻力。流体的这种抵抗两层流体相对运动的性质称为黏性。

可以通过牛顿黏性实验来进一步研究流体的黏性应力(又称黏性力)。如图 1.2 所示, 两块相距为 d 的平板间充满均

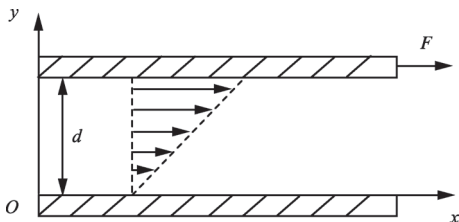


图 1.2 黏性现象

匀的真实流体。下板固定不动,上板在力 F 的作用下平行于下板运动。实验发现,当上板速度增加到某一数值 U 后就不再增加,最后上板以速度 U 做匀速直线运动,表明上板一定受到一种与拉力 F 等值反向的阻力作用。这种阻力就是由于流体黏性而产生的。

随着上板以速度 U 运动,由于黏性,与上板接触的一层流体黏附在上板上,而与下板接触的一层流体黏附在下板上。由于黏性应力存在于两板之间各流体层,其速度自下而上由零变到 U ,呈线性分布,即

$$u = \frac{U}{d}y$$

从而

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{d}$$

实验发现,作用力大小 F 与上板面积 A 之比 F/A 与速度梯度 du/dy 成正比。即

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

显然,平板每单位面积上所受到的黏性应力必与 F/A 数值相等,也等于流体内部的相邻两层流体之间的黏性应力。1686年,牛顿(Newton, 1643—1727)根据实验得出:流体黏性切应力与垂直于流体运动方向的速度梯度成正比。这就是著名的牛顿黏性定律,其数学表达式可写成

$$p_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

式(1.1)中的比例系数 μ 称为动力黏性系数,简称黏度系数,其单位是 $(\text{Pa} \cdot \text{s})$ 。下标“ yx ”表示应力分量 p_{yx} 的作用面元法向为正 y 轴、作用方向沿正 x 轴。

牛顿黏性定律是在二维线性层状流速场中建立的,对于一般流动的黏性应力问题,将在第6章讨论。历史上把符合牛顿黏性定律的流体称为牛顿流体,一般的气体和分子结构简单的液体都可以看作牛顿流体。具有复杂分子结构的流体,如蜂蜜、果酱、沥青、树胶和动物血液等,大都不遵从牛顿黏性定律,它们被称为非牛顿流体。

式(1.1)中黏度系数 μ 是对黏性大小的一种量度,它与运动性质无关,取决于流体的物理性质和状态。同一种流体的黏度系数随温度而变化,与压力大小无关。对于液体,当温度升高时,黏度系数 μ 减小;气体则相反,它的黏度系数随着温度升高而增大。这是因为流体黏性一方面是由于分子间的相互吸引力所致,另一方面是分子做无规则运动引起动量运输的结果。对于液体来说,分子间的相互吸引力这一因素是主要的,随着温度的升高,分子间的吸引力减小,因而黏性减弱,黏度系数减小;对于气体,则分子无规则运动引起动量运输这一因素是主要的,随着温度升高,无规则运动加剧,动量运输量增大,故气体的黏性随之增大。

在流体力学中,还经常用到运动黏性系数,它定义为

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

单位是 $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。

真实流体都是有黏性的,由于黏性的存在,给流体运动的研究带来了很大的困难。然而在很多问题中,黏性的存在对运动的影响很小,在这种情况下,往往忽略流体的黏性,当作完全没有黏性的流体来处理,这种完全没有黏性($\mu=0$)的流体称为理想流体。应该强调指出,真正的理想流体在客观实际中是不存在的,它只是真实流体在某种条件下的一种近似模型。

同一种流体能否作为理想流体,需视具体问题而定。根据牛顿黏性定律,黏性应力的大小取决于黏度系数 μ 和速度梯度。对于同一种流体,温度的变化不大时,黏度系数 μ 可视为常数。在速度梯度大的区域(如紧靠壁面),黏性应力比较大,不能忽略黏性;而速度梯度小的区域,则可忽略黏性的影响,当作理想流体处理。

1.3.2 可压缩性

流体在外力作用或温度改变等因素影响下,其体积或多或少都要有所改变,当质量一定时,流体的密度也随之有所变化。在受到外力作用或温度改变等条件下,流体的体积或密度可以改变的性质称为流体的可压缩性。

真实流体都具有可压缩性。液体的可压缩性很小,例如水在 10°C 时,每增加一个大气压,体积减小只不过是原来体积的二万分之一。因此,一般情况下可以不考虑液体的可压缩性。但是对于某些特殊的问题,例如水中爆炸问题,则必须考虑液体的可压缩性。气体的可压缩性比液体大得多,所以在一般情况下,应该考虑气体的可压缩性。但是如果压差比较小,气体运动速度小于声速,则气体的密度变化很小。例如气象上研究空气的运动,即使是 12 级的台风,空气密度的变化也不超过 2%。所以,气象上将大气看成是一种不可压缩流体。

根据上面的讨论可知,真实流体都是可压缩的,但对于液体和压差较小且低速流动的气体而言,由于密度变化小,均可近似看作是不可压缩的。因此,流体力学中根据流体的压缩性,将流体区分为可压缩流体和不可压缩流体。

1.4 流体力学发展简史

流体力学的知识起源于人们对自然现象的观察和在生产劳动中的经验。正是人们从本能地感知到自觉地认知,从粗浅、零散的知识到深入系统的科学,构成了流体力学发展史所经历的不同阶段。它大致可分为四个阶段,现扼要叙述如下。

1.4.1 第一阶段——经验科学积累

17世纪中叶以前,是流体力学发展的原始阶段。在这一阶段,人们缺乏系统的流体力学知识,只是通过朴素直观的思想和具体实践的方法去认识简单情况下的某些经验规律,从而解决生产及生活中所遇到的问题。这个阶段的数学工具仅限于算术、代数和简单的几何知识等。

早在史前时期,距今5000~7000年前,我国古人就有“剡木为舟”,这是对浮力最早的认识。在与自然灾害斗争中,我国夏代(距今约3000年前)有大禹治水疏通江河。公元前300年,秦朝伟大的水利学家李冰父子修建了至今仍在发挥作用,并为中外水利学家所敬服的“都江堰”。古希腊著名的科学家阿基米德(Archimedes,公元前287—公元前212)证明了物体在液体中所受到的浮力等于它所排开液体的重量,这一结果后来被称为阿基米德原理,迄今仍是流体静力学的基础。古希腊另一位著名的哲学家和科学家亚里士多德(Aristotle,公元前384—公元前322)在他的著作《物理学》一书中发表了空气对炮弹具有推动作用的想法,这可能是科学史上最原始的空气动力学概念的痕迹。

15世纪,意大利文艺复兴时代的代表人物达·芬奇(Da Vinci,1452—1519)在他的著作中谈到水波、管流、水力机械以及鸟的飞翔原理等问题。16世纪到17世纪中叶,荷兰科学家斯蒂文(S. Stevin,1548—1620),意大利物理学家和数学家托里拆利(Torricelli,1608—1647),意大利天文学家、力学和哲学家伽利略(Galileo,1564—1642),法国数学家和物理学家帕斯卡(Pascal,1623—1662)等继承和发展了阿基米德的工作。斯蒂文把刚体静力学中的普遍方法运用到流体静力学中;伽利略和帕斯卡的工作则是在流体静力学中应用了虚位移原理;托里拆利以发明气压计而闻名;帕斯卡发现了静止流体传递压强的规律;帕斯卡继续伽利略和托里拆利的大气压实验,还发现了大气压随高度的变化。

1.4.2 第二阶段——理论形成与发展

17世纪末叶到19世纪末叶,随着工场手工业向机器大工业发展的需要,许多新的流体力学问题被提出。例如,如何提高水力发动机的效率以及管道中更快的输运问题;因航海和贸易的需要,提出与造船有关的流体阻力问题,以及研究炮弹飞行中的空气阻力等问题。随着这些问题的逐步解决,从而建立和发展了解决流体力学问题的基本理论和实验方法。

1678年,牛顿利用理论与实践相结合的方法,研究运动物体所受到的阻力,确定了物体在流体中所受到的阻力的数量关系;牛顿还通过实验建立了流体层之间摩擦力与流层速度梯度的正比关系,这个关系称为牛顿黏性定律,它迄今仍然是黏性流体

力学的实验基础。

伽利略、惠更斯(Huygens, 1629—1695)、牛顿等人的工作为17世纪中叶后流体力学的飞跃发展奠定了坚实基础。从那时起,流体力学开始从个别的,有时是相互没有关联问题的考虑转到了对特有的定律及方法的系统论述,使它成为力学的独立分支。

1738年,伯努利(D. Bernouli, 1700—1782)首先对孔口出流与变截面管道流动进行了仔细观察和测量,提出了著名的伯努利原理。差不多同时,法国的皮托(H. Pitot, 1695—1771)发明了至今仍被广泛使用的测量流速的皮托管。1752年,法国科学家达朗贝尔(D'Alembert, 1717—1783)在研究物体阻力时,证明了物体在理想流体中运动所受到的作用力之和为零,但无法解释这个通常被称为达朗贝尔佯谬的结果。1755年,瑞士科学家欧拉(L. Euler, 1707—1783)在其著作《流体运动的一般原理》中最先引进了理想流体运动的基本方程组和速度势的概念,指出了有内摩擦力的实际流体和理想流体的区别,由此阐明了所谓的达朗贝尔佯谬。这些成就使他成为理论流体力学的奠基人。

欧拉、伯努利和达朗贝尔等人完成了理想流体动力学发展的重要阶段的工作,使理想流体的动力学理论达到了几近完善的境地。1781年,法国的拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)引进了流函数的概念,并首先获得了无黏性无旋转流动所应满足的动力学条件,并提出求解这类流动的复势方法,进一步完善了理想流体做无旋转流动的基本理论。流体波动理论的研究始于1781年拉格朗日关于重力流体表面长波近似理论的研究,波动传播的基本微分方程和波动传播速度的第一个公式都以拉格朗日命名。在柯西(Cauchy, 1789—1857)发表于1815年的论文集中包含了小振幅波的严格理论。法国的数学、天文学家拉普拉斯(Laplace, 1749—1827)以及数学、力学和物理学家泊松(Poisson, 1781—1840)和英国的力学、数学家斯托克斯(Stokes, 1819—1903)等人的工作促进了小振幅波理论的发展。

早在1775年欧拉就证明了可能存在没有速度势的运动。柯西在1815年和拉普拉斯在1847年分别独立地就涡旋的基本概念做了解释:涡旋是流体元整体的转动角速度。1845年,德国科学家亥姆霍兹(Helmholtz, 1821—1894)引进了一系列有关涡旋的基本概念,提出了以他名字命名的涡旋第一和第二定理,由此创立了涡旋运动理论。这一理论对于大气动力学、机翼理论、螺旋桨理论以及其他许多问题的解决起到了极大的作用。

黏性流体力学的创立则是由1823年法国的纳维(Navier, 1785—1836)和1845年英国的斯托克斯分别用不同的方法建立了不可压缩和可压缩黏性流体的运动方程组开始的,其基本方程就是著名的纳维—斯托克斯方程。在此之前,泊肃叶(Poiseuille)和哈根(Hagen)分别独立地发表了他们对细圆管中层流流动的实验结果,它

与斯托克斯获得的理论结果完全一致。

黏性流体在管中运动存在着两种不同的流动状态,即层流和湍流,这是 1883 年英国的力学、物理学家和工程师雷诺(O. Reynolds, 1842—1912)通过一系列实验后发现的。他同时总结出从层流到湍流的过渡仅依赖于一个无量纲数——雷诺数。其实这一结论的得出获益于弗劳德(Froude, 1810—1879)和他的儿子罗伯特(Robert, 1846—1924)提出的模型试验,以及瑞利首先建议采用的量纲分析。1895 年雷诺又引进了雷诺应力的概念,并用时均法建立了不可压缩流体湍流运动所满足的方程组。雷诺的研究为湍流理论研究奠定了基础。湍流理论在气象学、水利学、阻力理论以及传热等问题上的应用十分广泛且卓有成效。

在黏性流体动力学发展的同时,可压缩气体动力学也得到了发展。1839 年文纳特(Venant)和温切尔(Wentzel)将绝热气体的逸出速度、容器中气体的压强和密度联系起来。杰出的几何学家黎曼(Riemann)在 1860 年从理论上证明了在连续气体中可以产生间断面,这个间断面就是激波。1870 年兰金(Rankin)和 1887 年惠更里约特(Hugoniot)给出了气体的稠密跳跃(激波)的基本理论,这个理论建立了密度跳跃前后的压强和密度之间的联系。斯托多拉(Stodola)发现并研究了拉伐尔(Laval)喷管中形成的激波现象。

1.4.3 第三阶段——近代流体力学发展

从 19 世纪末到 20 世纪中叶,流体力学的基础理论已逐渐趋于成熟,许多流体力学独立分支开始形成。随着计算机的问世,科学和技术日益密切结合,尤其是航空航天事业的发展使得流体力学取得了迅猛的进展。

19 世纪末叶,随着人们对航空兴趣的高涨,机翼理论得到极大发展。俄国科学家茹科夫斯基(Жуковский)从 1889 年开始从事航空理论方面的工作,从各种模型的飞翔实验研究入手,到 1892 年完成了第一部著作《论鸟的飞翔》;1906 年完成的著作《论附羊涡》奠定了飞机机翼举力的理论基础;1901 年利用共角映射法获得了一种理想翼型,这就是迄今以他名字命名的茹科夫斯基翼型。茹科夫斯基的一系列理论性论著奠定了理论空气动力学的基础。在这方面从事理论和实验工作的科学家还有迦僚金(Чапцгин)等人。

1904 年,德国物理学家普朗特(L. Prandtl, 1875—1953)经过大量的实验提出了著名的边界层理论。边界层理论指出,可以把黏性很小的流场分成固壁附近的细薄黏滞层(即边界层),以及远离固壁的几近非黏滞外层,在外层可用欧拉方程及伯努利方程求解。1921 年,普朗特的学生冯·卡门(Von. Karman)提出了求解边界层方程的动量积分关系式,迄今仍被认为是一种较好的近似方法。边界层理论是具有划时代意义的理论,这一理论既明确了经典流体力学的适用范围,又较好地解决了运动物

体受的阻力问题,普朗特本人又被誉为近代力学的奠基人之一。早期利用边界层理论解决关于大气环流基本问题的是苏联学者柯钦(Коцин,1901—1944)。边界层理论的结果在飞机、舰船和透平机等制造方面得到了广泛的应用。

20世纪初,随着英国莱特兄弟第一架飞机升空,航空和航天问题对流体力学提出了更高的要求。20年代到30年代主要的研究侧重于低速流动。40年代以后,喷气推进和火箭技术的应用,促进了超音速以至高超音速的研究。由于航天的发展对高空有了新认识,因而发展了稀薄气体力学。同时磁流体力学和等离子力学等新的流体力学分支也相继建立和发展起来。

流动稳定性理论是近代流体力学发展的重要组成部分。苏联学者开创了该领域的研究,伯纳得(Benard)、斯托迈尔(Stommel)、泰勒(Taylor)等人分别对热对流的不稳定性,层结流体的不稳定性,惯性不稳定性等问题做了研究。美籍华裔学者林家翘、易家训,我国学者周恒等在流动稳定性理论方面都做出了重要的贡献。

20世纪50年代,随着计算机技术以及数值理论和方法的不断完善,许多原来无法用理论分析求解的复杂流体力学问题有了求得数值解的可能性,这又促进了流体力学计算方法的发展,并形成了“计算流体力学”这一新的分支学科。值得一提的是,大气、海洋科学发展的需要极大地促进了高速度、大容量计算机的发展。

1.4.4 第四阶段——现代流体力学发展

从20世纪60年代起至今,流体力学的发展主要有两个方面,一方面是研究难度大、复杂程度高的问题,如湍流、流动稳定性、涡旋和非定常流等非线性课题;另一方面是与相邻学科的相互渗透,形成了许多新的分支或交叉学科。例如,研究地球上大气和海洋这两种流体的大尺度运动,相应地形成了地球物理流体力学;进一步考虑地球大气和海洋各自特征,又构成了大气动力学和海洋动力学,或称动力气象学和动力海洋学;还有诸如生物流体力学、多相流体力学、物理-化学流体力学、环境流体力学、磁流体力学等,所有这些学科都是以流体力学为共同基础的。

这一阶段要特别提到对我国现代流体力学发展具有重要影响的三位科学家,他们是力学家周培源、现代力学家郭永怀和科学家钱学森。周培源是中国流体力学湍流理论研究的先驱,20世纪50年代他提出的普适湍流模式理论在国际上得到不断发展,所提出的湍流涡旋结构理论成功地解释并正确地预言了一些实验结果。郭永怀在高速空气动力学和爆轰学等理论研究,以及将理论研究成果应用于导弹、宇航和核爆炸等方面做出了杰出的贡献,他还在磁流体力学、化学流体力学的研究方面做了大量开创性的工作。钱学森是许多交叉学科和横断性学科的倡导者,他在空气动力学方面提出了跨声速流动相似律;与他的导师冯·卡门一起提出了高超声速流的概念,为飞机在早期克服热障和声障提供了理论依据,至今在高亚声速飞机设计中采用

的公式是以卡门和钱学森名字命名的,即卡门-钱学森公式;此外,他还率先开展了对稀薄气体力学的研究。

纵观流体力学学科的发展历程不难看到,流体力学所涉及的领域与人们的生活休戚相关,流体力学发展史上每一个重大问题的突破都极大地推动了社会生产的进步。今天,尽管流体力学已获得了巨大的进展,但一些重要的基本问题如湍流、涡旋运动、流动稳定性、非定常流动和非线性水波等均未得到彻底解决,许多的流体力学分支还处于发展阶段,其他诸如宇航、船舶、海洋工程、机械工程和水利工程等应用技术的发展都离不开流体力学源源不断提供的新思想、新方法和新成就。流体力学这门古老而又年青的学科正在焕发出勃勃的生机,吸引着众多流体力学工作者为之奋斗。

应用例

例 1 圆管定常流动的黏性应力

设黏度系数为 μ 的流体,在半径为 R 的圆管内做定常流动,流量为 Q 。圆管截面上轴向速度分布为

$$u = \frac{2Q}{\pi R^4}(R^2 - r^2)$$

试求圆管截面上的切应力分布 τ ,壁面切应力 τ_w 和管轴上的切应力 τ_0 。

解:根据牛顿黏性定律,圆管内的黏性切应力分布为

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

上式负号是因为当径向坐标 r 增加时,速度 u 减小。将已知速度分布式代入上式得

$$\tau = -\mu \left[\frac{2Q}{\pi R^4}(-2r) \right] = \frac{4Q\mu}{\pi R^4}r$$

上式表明在圆管截面上,黏性切应力沿径向为线性分布。在管壁上黏性切应力最大,即

$$\tau_w = \frac{4Q\mu}{\pi R^4}r \Big|_{r=R} = \frac{4Q\mu}{\pi R^3}$$

在管轴上黏性切应力最小,即

$$\tau_0 = \frac{4Q\mu}{\pi R^4}r \Big|_{r=0} = 0$$

例 2 水的可压缩性

海水的密度与压强的关系可用如下经验公式表示:

$$\frac{p}{p_a} = 3000 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^7 - 1 \right]$$

式中, p_a 和 ρ_a 均为标准状态下的值。设海面上水的密度为 $\rho_a = 1030 \text{ kg/m}^3$, 试求在 10 km 海洋深处的海水密度 ρ 、重度 ρg 和比重 SG 。

解:按静水中压强与水深的关系, 10 km 深处的压强与海面上压强之比约为 $p/p_a = 1000$ 。代入已知压强密度经验公式可得

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \left(\frac{p/p_a + 3000}{3000} \right)^{1/7} = 1.0417$$

故 10 km 处

$$\text{海水密度为 } \rho = (1030 \text{ kg/m}^3) \times 1.042 = 1073 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{重度为 } \rho g = (1073 \text{ kg/m}^3) \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 10526 \text{ N/m}^3$$

$$\text{比重为 } SG = \rho/\rho_{\text{H}_2\text{O}(4^\circ\text{C})} = (1073 \text{ kg/m}^3)/(1000 \text{ kg/m}^3) = 1.07$$

计算结果表明, 在 10 km 海洋深处, 压强增加了 1000 倍, 水的密度仅增加 4.17%, 因此, 在通常情况下可将水视为不可压缩流体。

实践题

1. 下表列出了各海拔高度上空气分子的平均自由程。试分别计算出特征长度为 10 m 和 10^6 m 时各高度上的克努森数填于表中, 并说明如果讨论 150 km 高度上航天飞机受到的阻力, 能否把空气看成连续介质; 如果讨论洲际尺度的大气运动, 这一高度上的空气又是否可以看成连续介质。

海拔高度(km)	空气分子平均自由程(m)	$Kn (L=10 \text{ m})$	$Kn (L=10^6 \text{ m})$
0	10^{-6}		
50	10^{-4}		
100	10^{-1}		
150	10^2		
200	10^5		

2. 在如图 1.2 所示的牛顿黏性实验中, 若上板速度 $U = 3 \text{ m/s}$, 两板间距离 $d = 0.3 \text{ m}$, 流动的动力黏性系数 $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 密度 $\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$, 试求流体的运动黏性系数以及下板和上板所受到的黏性切应力。

3. 黏度系数为 μ 的牛顿流体做平行直线运动, 其速度分布为

$$u = U \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right), \quad v = w = 0$$

求 $y=\delta$ 及 $y=0$ 平面上的黏性切应力。

4. 设空气的黏度系数 $\mu=1.783 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 空气平行于一平板运动, 速度分布为 $u=40000(y-164y^2)$, 式中, y 是距平板的距离, 求空气对平板的黏性切应力。

5. 一直径为 75 mm 的圆柱体同轴地悬挂在一内径为 76.5 mm 的桶中, 在它们之间的空间中充满着油, 圆柱体长为 200 mm, 当圆柱体转速为 480 r/min 时, 所需的力矩是 $4 \text{ N} \cdot \text{m}$, 设流速沿半径线性分布, 求油的黏度系数。

本章小结

1. 基本概念

(1) 流体、流体力学定义, 流体力学的基本研究方法。

(2) 流体质点概念与流体连续介质模型。

(3) 流体模型

理想流体与真实(黏性)流体: 黏度系数 μ 是流体本身的属性, 与流体运动状态无关; 液体黏度系数随温度升高而减小, 而气体黏度系数随温度升高而增大。运动黏性系数定义为 $\nu=\mu/\rho$ 。

不可压缩流体与可压缩流体: 海水和低速运动的大气通常被认为是不可压缩流体。

2. 基本理论

(1) 牛顿黏性定律: $p_{yx} = \mu du/dy$, 其中下标“ yx ”表示应力分量 p_{yx} 的作用面元法向为正 y 轴、作用方向沿正 x 轴。

(2) 流体力学发展史: 大致分为四个阶段。

3. 基本方法

(1) 已知速度分布, 利用牛顿黏性定律求黏性应力分布和固壁上的黏性应力。

(2) 利用已知的速度分布, 借助牛顿黏性定律求流体的黏性系数。

第 2 章 流体运动学基础

流体运动学是在流体的连续介质假设基础上,从几何观点来研究流体的运动,即只讨论如何描述流体的运动,而不涉及引起运动变化的原因——力。本章着重介绍四部分内容:第一,描述流体运动的两种方法及相应的几何表示;第二,流体力学中反映质量守恒定律的连续性方程;第三,流体微团运动的速度分解定律;第四,五种特殊流动的复势描述。

2.1 流体运动描述方法与几何表示

在研究流体运动时,首先要解决的问题是用什么方法来描述流体的运动。流体是连续介质,它的运动与单个质点或刚体的运动有许多不同,因而研究的方法也不完全相同。描述流体运动的方法有两种,一种是拉格朗日方法,另一种是欧拉方法。

2.1.1 拉格朗日方法

拉格朗日方法是把流体看成是连续分布的宏观质点系,着眼于流体质点,按照质点力学的方法,分析研究每一个流体质点在运动过程中的位置以及各种物理量(如速度、密度和温度等)随时间的变化规律。如果掌握了所有流体质点的运动情况,那么整个流体的运动规律就清楚了。例如,现代天气预报中,通过卫星追踪地球周围的天气系统,研究它们的发生、发展规律,从而准确地预报天气趋势。又如,在流动粒子图像处理技术中,通过测量流体中各个示踪粒子的瞬时速度,从而获得整个流场的速度分布。上述两例都采用了拉格朗日方法的观点。拉格朗日方法是理论力学方法在流体力学中的自然延续,它将质点力学的研究推广至连续介质。

为了研究每一个流体质点的运动,首先必须描述它们,所以应对每个流体质点予以标识。拉格朗日给出了标识的方法:在初始时刻 $t=t_0$, 每一个流体质点都有一个空间位置,用坐标 (a, b, c) 表示,它就用来作为流体质点的标识。显然,不同的流体质点将有不同的 (a, b, c) 值,同一流体质点的 (a, b, c) 值不随时间变化。对于空间连续分布的流体质点,其 (a, b, c) 也是连续的。在给定每个流体质点的标识后,流体质点的任意物理量 B 就可以表示为 a, b, c 和时刻 t 的函数,即

$$B = B(a, b, c, t) \quad (2.1)$$

自变数 a, b, c, t 称为拉格朗日变数。当 a, b, c 固定时,式(2.1)表示某确定流体质点

物理量 B 随时间的变化规律;当 t 固定时,该式则表示同一时刻物理量 B 随流体质点的不同而变。物理量 B 既可以是矢量也可以是标量。例如,任意流体质点在空间的位置矢量 \mathbf{r} 可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$$

在直角坐标系 (x, y, z) 中有

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

当 a, b, c 固定时,上式表示某确定流体质点的运动规律;当 t 固定时,上式则表示在同一时刻各流体质点的位置分布。所以上式描述了所有流体质点的运动情况。

对于确定的流体质点, a, b, c 是一组常数,因此,在拉格朗日方法中,如果要求流体质点物理量 B 随时间的变化率,只需由式(2.1)对 t 求偏导数,即

$$\frac{\partial B(a, b, c, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

例如,要求某确定流体质点的速度,根据速度定义 $\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt$,但是对于确定的流体质点, a, b, c 是一组常数,因此

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t}$$

在直角坐标系 (x, y, z) 中,有

$$u = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t}$$

同理,质点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

在直角坐标系 (x, y, z) 中,有

$$a_x = \frac{\partial u(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

$$a_y = \frac{\partial v(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

$$a_z = \frac{\partial w(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

2.1.2 欧拉方法

欧拉方法着眼于流体运动空间(简称“流场”)中的固定点,研究在固定空间点位置上流体的各种物理量随时间变化,以及空间某点移动到相邻点时各物理量随时间的变化。如果掌握了流动空间每一点的运动情况,则对整个流场的变化规律就清楚了。气象上广泛应用欧拉方法进行天气预报。例如,在各地设立的气象站,可以将同一时刻观测到的气象要素迅速报到通信中心,进而绘制成天气图来研究大气的运动,

做出天气预报。

这里特别指出,不要把空间点与流体质点相混淆。流体运动时,同一空间点在不同时刻由不同的流体质点所占据,所谓空间各点上的物理量不能理解为这些空间点所具有的物理量,而是指在该时刻通过各点位置的流体质点的物理量。例如通常说某时刻南京的气温,是指该时刻流经南京近地面 1~2 m 的空气所具有的温度。

下面着重介绍利用欧拉方法分析流体运动。

(1) 物理量场与场函数

在流场的各点处,流体的各种物理量属性并不相同。例如,在大气运动的空中,空气在不同位置处的速度、温度和气压等物理量往往是不一样的。采用欧拉方法来研究流体的运动需要掌握整个流场中各种物理属性的分布情况。通常,将某种物理量在流场中分布情况的整体叫作该物理量的场。例如,气压场、温度场和速度场等就是指大气的压强、温度和运动速度等物理量在空间的分布情况。欧拉方法就是把整个流体运动问题的研究归结为研究各种物理量场的问题,把流体的运动归结为物理量场随时间的变化。例如,天气预报形势图就是描述某一时刻大气运动主要物理量的分布情况,即对有关物理量场的描述。天气图的分析,就是对这些物理量场进行分析,从中找出变化的规律进行天气预报。

物理量有标量和矢量,相应地,物理量场也有标量场和矢量场。温度场、气压场和湿度场等都是标量场,而速度场和重力场等是矢量场。

在流场中,同一时刻位于不同位置的流体质点的物理量往往是不同的,同一位置,在不同时刻,其物理量也往往是不同的。所以这些物理量是随位置和时刻不同而异的,它们是位置坐标 (x, y, z) 和时刻 t 的连续函数,称之为场函数。某一种场函数的数学表达式具体反映出该场函数与位置和时间的函数关系,也就具体反映出该物理量场的空间分布和随时间的变化。在直角坐标系中场函数的一般数学表达式为

$$B = B(x, y, z, t) = B(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

例如,气压的场函数数学表达式为

$$p = p(x, y, z, t) = p(\mathbf{r}, t)$$

速度的场函数数学表达式为

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$$

写成分量式为

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t)$$

自变数 x, y, z, t 称为欧拉变数。如果 t 为常数, x, y, z 为变数,则 $B = B(x, y, z, t)$ 表示某时刻该物理量 B 的空间分布;若 t 为变数, x, y, z 为常数,则反映某固定空间点处该物理量随时间的变化规律。

(2) 随体导数(质点导数)

在拉格朗日方法中, 流体质点物理量 B 随时间的变化率可以直接用 $\partial B/\partial t$ 来表示。但是在欧拉方法中, 物理量 B 是 x, y, z, t 的函数, 它对时间 t 的偏导数只表示在固定空间点处物理量 B 随时间的变化率, 而不能确定流体质点的物理量 B 随时间的变化率。那么, 在欧拉方法中应该如何表示流体质点的物理量随时间的变化率呢?

在流场中, 某物理量 B 的一般函数关系式为 $B=B(x, y, z, t)$, 式中, x, y, z 是独立变量。但是当着眼于确定流体质点, 它的位置坐标 (x, y, z) 随时间变化, 是时间 t 的函数, 即

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

那么该流体质点的物理量 B 应该是时间 t 的复合函数, 即

$$B = B[x(t), y(t), z(t)] \quad (2.4)$$

根据复合函数求导, 可以得到流体质点的物理量 B 随时间的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) B \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) B \end{aligned} \quad (2.5)$$

例如, 在欧拉方法中, 流体质点的加速度即速度随时间的变化率, 表示为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}$$

其直角坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) u \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) v \\ a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) w \end{cases}$$

对于其他物理量随时间变化率, 可以用类似方法求得。例如, 密度随时间的变化率可以表示为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \rho$$

式(2.5)表明了欧拉方法中物理量三种变化率之间的关系。

dB/dt 为随体导数或质点导数, 它是着眼于确定的流体质点, 表示该流体质点运动过程中所具有的物理量 B 随时间的变化率。

$\partial B/\partial t$ 为局地导数, 它是着眼于确定的空间点, 表示流场中某固定位置处的物理量 B 随时间的变化率。若流场各点处所有物理量都不随时间变化, 这种流场称为定常流场(或稳定流场), 反之称为非定常流场(或不稳定流场)。由于在定常流场中, 各

点物理量不随时间变化,因而 $\partial B(x, y, z, t)/\partial t = 0$,可见,局地导数反映了流场的非定常性。

$(\mathbf{V} \cdot \nabla)B$ 为对流导数或者迁移导数,它表示由于流体运动和物理量分布不均匀性所引起物理量的变化率。对流导数又可以写成 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)B = V\partial B/\partial s$,其中 $\partial B/\partial s$ 代表沿运动方向单位长度物理量 B 的变化量,反映了物理量 B 沿运动方向分布的不均匀程度; $V\partial B/\partial s$ 则表示流体质点在单位时间内沿运动方向移动了 V 的距离时,由于物理量分布不均匀性而引起该物理量的变化。

式(2.5)说明了物理量 B 的随体导数、局地导数和迁移导数三者之间的关系。城市天气预报常关心的是局地导数,因此应用时常把式(2.5)改写为

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{dt} + \left[- \left(u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \left(-w \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right] \quad (2.6)$$

并称 $-\left(u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y}\right)$ 为平流导数,称 $-w \frac{\partial B}{\partial z}$ 为对流导数。

下面以气温 T 为例说明局地导数和其他导数的关系(这里暂时忽略对流运动的影响)。一个台站所处位置气温的变化往往是由两方面的原因引起:一方面是由于空气的移动,上游冷暖空气对台站温度的影响,这就是平流导数的作用;另一方面是在空气的移动过程中,由于蒸发、凝结、辐射和传导等因素,要引起空气团本身的温度变化,其必然直接影响台站的气温,这就是随体导数的作用。所以说,气温的局地变化是由随体变化和平流变化共同作用的结果,即

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

值得注意的是,不要将 $\partial B/\partial t = 0$ 和 $dB/dt = 0$ 相混淆。 $\partial B/\partial t = 0$ 仅仅表示流场中各固定空间点处的物理量 B 不随时间变化,但并不意味着流体质点的物理量 B 不随时间变化。例如,不可压缩流体的变截面流动过程中,见

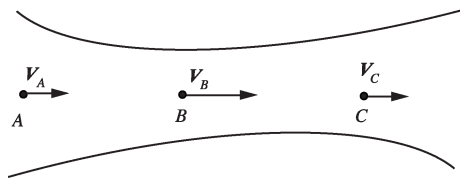


图 2.1 不可压缩流体变截面定常流动

图 2.1,如果流场中各点(例如 A, B, C 点等)的流速不随时间变化,即 $\partial \mathbf{V}/\partial t = 0$,这就是定常流动。但是,流场中各点的流速并不相等,显然 \mathbf{V}_B 就大于 \mathbf{V}_A 和 \mathbf{V}_C ,流体质点由 A 到 B 再由 B 到 C ,其速度都要发生变化,则加速度不等于零。

为了进一步理解局地导数和随体导数的概念,接下来讨论不可压缩流体的数学表示。根据定义,不可压缩流体其实是指流体质点的密度在运动过程中保持不变。换言之,对于不可压缩流体而言,密度的随体导数为 0,即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

此为不可压缩流体的数学表达式。那么,不可压缩流体是不是一定满足 $\rho = \text{常数}$ 呢? $d\rho/dt = 0$ 只表示每个流体质点在运动过程中密度保持不变,但是并不说明流体质点的密度都彼此相等,故不可压缩流体的密度分布并不一定均匀,所以 ρ 不一定是常数。只有在不可压缩及均质(密度均匀分布)的条件下,即 $d\rho/dt = 0$,同时 $\nabla\rho = 0$ 时,利用式(2.5)得 $\partial\rho/\partial t = 0$,密度处处相等且不随时间改变, ρ 才是常数。所以, $d\rho/dt = 0$ 表示不可压缩流体, $\rho = \text{常数}$ 表示均质不可压缩流体,两者概念不同。不过在本书中提到不可压缩流体时,除了特别说明外,都是指均质不可压缩流体。

2.1.3 欧拉变数与拉格朗日变数关系

拉格朗日方法和欧拉方法是从不同观点出发描述同一流动。因此,两种描述方法是完全等效的,可以从一种描述方法转换到另一种描述方法,现在来说明这一点。

(1)拉格朗日变数表达式变换为欧拉变数表达式

为了从 $B=B(a,b,c,t)$ 变换到 $B=B(x,y,z,t)$,将拉格朗日变数表示的位置函数

$$x = x(a,b,c,t), \quad y = y(a,b,c,t), \quad z = z(a,b,c,t)$$

求反函数。若函数行列式 $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial a & \partial y/\partial a & \partial z/\partial a \\ \partial x/\partial b & \partial y/\partial b & \partial z/\partial b \\ \partial x/\partial c & \partial y/\partial c & \partial z/\partial c \end{vmatrix}$ 满足非零和非

无穷大之条件,则由上式可解出 a,b,c 作为 x,y,z,t 的单值函数,即

$$a = a(x,y,z,t), \quad b = b(x,y,z,t), \quad c = c(x,y,z,t)$$

它给出了在时刻 t 位于 (x,y,z) 处的流体质点的标志 a,b,c ,不同的 x,y,z,t 值对应不同的流体质点。将该式代入拉格朗日变数表示的物理量 $B=B(a,b,c,t)$,就得到了欧拉变数表示的物理量场函数。

(2)欧拉变数表达式变换为拉格朗日变数表达式

为了从 $B=B(x,y,z,t)$ 变换到 $B=B(a,b,c,t)$,需将 x,y,z 看作是流体质点在不同时刻的位置,故 x,y,z 是一组时刻 t 的函数,因此,由欧拉变数的速度表示式

$$\frac{dx}{dt} = u[x(t),y(t),z(t)], \quad \frac{dy}{dt} = v[x(t),y(t),z(t)], \quad \frac{dz}{dt} = w[x(t),y(t),z(t)]$$

积分后可得

$$x = x(t,C_1,C_2,C_3), \quad y = y(t,C_1,C_2,C_3), \quad z = z(t,C_1,C_2,C_3)$$

其中 C_1,C_2,C_3 为三个积分常数,它们可由初始时刻 $t=t_0$ 的流体质点位置 a,b,c 决定,即有

$$a = a(t_0,C_1,C_2,C_3), \quad b = b(t_0,C_1,C_2,C_3), \quad c = c(t_0,C_1,C_2,C_3)$$

确定 C_1, C_2, C_3 , 再将其代入前式, 即可得到位置的拉格朗日表达式

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

将上式代入欧拉变数表示的表达式 $B(x, y, z, t)$ 中, 就可得到拉格朗日变数表示的物理量表达式。

上述描述流体运动的两种方法各有其应用的领域。拉格朗日方法是质点力学的自然延续, 比较直观, 流体力学中的一些基本概念的建立, 都是从拉格朗日观点出发的。欧拉方法是流体力学中最常用的方法, 因其以流场为研究对象, 根据流体的连续介质假设, 在流动区域内场函数是连续可微的(除个别点、线或面外), 这就使得在流体力学中可以利用数学分析的方法研究场函数。此外, 实际测量中, 跟踪每一个流体质点了解其物理量及其变化几乎是不可能的, 而着眼于流场的观点, 测量流场各点处流体的物理量及其变化则是可能的。因此, 在流体力学中, 根据物理学普遍定律研究流体运动规律时, 常常用拉格朗日方法, 而这些规律的数学表达式则往往采用欧拉方法。

2.1.4 流体运动几何描述方法

拉格朗日方法和欧拉方法是以数学形式分别描述了流体质点的运动和流场随时间的变化规律。在流体力学中还可以用极其丰富的几何曲线来直观地描述流动的情况, 它们是迹线、流线、脉线和时间线。

(1) 迹线

所谓迹线就是流体质点运动的轨迹线, 即流体质点在不同时刻运动位置的连线。例如台风中心移动过程中所行路径就是它的迹线。显然, 迹线是拉格朗日方法所对应的几何图线。迹线特点是: 在空间运动的每一个流体质点都有一条迹线, 不同的流体质点有不同的迹线, 所有流体质点的迹线构成一个曲线族。

如果流体运动由位置的拉格朗日变数表达式给出

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t) \quad (2.8)$$

它们是流体质点迹线的参数方程。消去 t 后得到空间两个曲面方程的交线就是迹线, 即流体质点所行的路径线。对于确定的流体质点, 方程中 a, b, c 为确定的常数。迹线上的点具体描述了该质点在各时刻 t 所处的位置, 对于不同的 a, b, c 值, 就得到不同流体质点的迹线。

如果流体运动是由速度的欧拉变数表达式表示的, 则求迹线方程就是将速度的欧拉变数表达式转换为位置的拉格朗日变数表达式。

(2) 流线

矢量场可以用矢量线来描述。速度场是矢量场, 描述速度场的矢量线就是流线。欧拉方法是研究物理量场的, 因此, 流线是欧拉方法对应的几何曲线。具体来说, 所谓流线就是在任意时刻 t , 在流场中设想的一种曲线, 该曲线上任一点的切线方向恰

与该时刻该点的流速方向相吻合。若将流线绘制出来,它就可以形象地描述出流场中各流体质点在同一时刻的流速分布情况。气象上,常用流线图来直观地描述风场的分布情况。流线具有如下的特性:①在任意时刻 t ,通过流场内的任何空间点都有一条流线,整个流场形成一流线族;②通过流场内的任何空间点,只能有一条流线,反之,若过空间某点有两条流线,则该空间点的流体质点速度将有两个方向,显然物理上相矛盾;③流线因时而异,只有在稳定流场中,流线才不变;④在连续流场中,流线不能中断,它起止于流场的边界或围成封闭曲线,因为流线中断意味着无流体质点,与连续流场假设矛盾。

根据流线的定义,流线的微分方程为

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{s} = 0 \quad (2.9)$$

式中, $d\mathbf{s}$ 为流线矢量元,其方向沿流线切线方向。在直角坐标系 (x, y, z) 中,流线的微分方程可写为

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.10)$$

式中, u, v, w 是 x, y, z 和 t 的函数,流线是对同一时刻而言的,故 t 是参量,在积分时应当作常数处理。通过对方程组式(2.10)积分,得到两个空间曲面的交线就是流线。

此外,流线方程在柱坐标系 (R, φ, z) 和球坐标系 (r, θ, φ) 中分别为

$$\frac{dR}{v_R} = \frac{Rd\varphi}{v_\varphi} = \frac{dz}{v_z} \quad (2.11)$$

$$\text{和} \quad \frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{v_\varphi} \quad (2.12)$$

流线和迹线是两个不同的概念。通俗地说,流线是某一时刻给流体运动拍的一幅照片,直观地表达出速度场在这一时刻的分布;迹线是对某个流体质点的运动进行追踪的结果,迹线上的点反映该流体质点在不同时刻的位置,故流体质点是沿着迹线运动而不是沿着流线运动的。一般情况下,流线与迹线不重合,只有在稳定流场中,两者才重合。下面通过一个简单的实验加以说明。

图 2.2 是一个装满水的水箱,侧壁开了一个小孔,箱顶有一供水龙头,先将供水龙头旋紧,水从小孔中射出,由于水面逐渐下降,射流也逐渐下倾,图中 L_1 , L_2 和 L_3 分别为时刻 t_1, t_2 和 t_3 的三条射流线。假定在 t_1 时刻,把一根丝线放在射流的 A 点,则丝线受水的冲动,形成 L_1 曲线,此时丝线上各流体点的速度方向都处在该点处的切线方向上,曲线 L_1

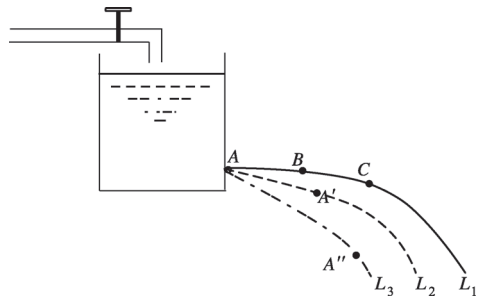


图 2.2 水箱底部小孔射流

就是前面定义的流线。同样, L_2 和 L_3 分别为 t_2 和 t_3 时刻的流线。又假定 t_1 时刻位于出口处 A 点的流体质点, 在 t_2 时刻落到 A' 点, 在 t_3 时刻落到 A'' 点, 连接 A, A' 和 A'' 三点形成一条迹线 $\widehat{AA'A''}$ 。可见, 在水箱中液面发生变化时, 流动是非定常的, 即流线和迹线是不重合的。当打开供水龙头, 并保持水箱中液面高度始终为 h 时, 则在任意时刻射流始终只有一条, 即 t_1, t_2 和 t_3 时刻的流线均为 L_1 。 t_1 时刻来自出口处 A 点的流体质点, 在 t_2 时刻落到 B 点, 在 t_3 时刻落到 C 点, 迹线始终与流线重合。可见, 在水箱中液面保持不变时, 流动是定常的, 即流线和迹线相重合。

在流体力学中, 还要用到流面和流管的概念, 它们是流线概念的延伸。在某时刻, 流场中做一条非流线曲线, 过曲线上每一点做一条流线, 这些流线在空间就形成一个曲面, 该曲面称为流面, 即流面是由流线组成的曲面。若上述所做的非流线是封闭的, 则由此封闭线所做的流面称为流管, 即流管是流线所组成的管状曲面。

(3) 脉线和时间线

除了迹线和流线外, 在流体力学的实验研究中, 还要用到脉线和时间线的概念。

将相继经过某一空间固定点的流体质点连成的曲线定义为脉线。如果该空间固定点是施放染色剂的源或施放示踪粒子的源, 则可观察到一条染色线, 故脉线也称染色线。经过烟头或燃香冒出的烟, 或经过烟囱冒出的烟, 都是脉线的例子。在流动显示实验中, 染色线、烟丝线等显示的流动图像都是脉线。

初始时刻 t_0 在流场中任取一条线, 将 t 时刻该线上原流体质点运动到新位置上的连线定义为时间线。时间线也称流体线。如在流动显示实验中用到的氢泡发生技术、电弧发生技术等, 就是利用产生的时间线来观察流动情况或定量测量流动的速度。显而易见, 时间线和迹线密切相关, 组成时间线的流体质点, 将各自沿该质点的迹线运动, 并与某一时刻各自到达一新的位置, 组成另一时间线。因此, 时间线的求法, 可以利用迹线的求法来得到。除时间线以外, 还可以有时间面和时间体, 这不难从时间线推广得到。

2.2 连续性方程

连续性方程是流体力学的一个基本方程, 它是在连续流动的条件下, 关于运动流体质量守恒定律的数学表达式。为了推导连续性方程, 首先引入系统和控制体的概念, 并讨论流体系统总物理量的随体导数与控制体内物理量的变化率(局地导数)之间的关系——雷诺输运公式。

2.2.1 系统和控制体

物理学中已介绍过, 系统是由确定不变的物质所组成的体系。系统外的一切称

为外界,系统的边界是把系统和外界分开的表面,这个表面既可以是真实的,也可以是假设的。在流体力学中,系统就是指由确定的流体质点所组成的流块。

系统边界有如下特点:①系统的边界随系统一起运动,它可以是刚性的,也可以产生变形;②在系统的边界上,不存在质量的交换,即流体既不能流出边界也不能流入边界;③在系统的边界上,可以存在能量的交换以及系统与外界的相互作用。

控制体是指流场空间中的一个固定体积,流体不断地从固定体积流过,其形状和大小恒定不变,相对于固定坐标系始终是静止的,而控制体内的物质时刻在改变。控制体的边界称为控制面,它是一个封闭面,其形状和大小也保持不变。

控制面有如下特点:①控制面相对于坐标系始终是静止的;②在控制面上,可以有质量和能量的交换,即质量和能量可以通过控制面流进或流出;③在控制面上,存在着控制体外物质与控制体内物质的相互作用。

显而易见,若以系统为对象来研究流体的运动,意味着采用拉格朗日方法;若以控制体为对象,则意味着采用欧拉方法。

2.2.2 雷诺输运公式

流体力学基本方程是物理学普遍定律在流体力学中的数学表达式。由于这些定律常以系统为研究对象,来反映系统总物理量(例如,质量、动量和能量等)的变化规律,因此,有必要讨论系统总物理量的变化率,即随体导数。另一方面,流体力学还广泛采用了欧拉观点,考虑控制体内物理量的变化率,即局地导数。为此,推导流体力学基本方程,就需要研究系统总物理量的随体导数与控制体内物理量的局地导数之间的关系。

在任意时刻 t ,考虑由封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的流体系统,显然该系统体积 τ 与时刻 t 有关,可记为 $\tau(t)$ 。设 η 表示单位质量流体的某物理量,它一般是位置坐标 (x, y, z) 和时刻 t 的函数,则系统的总物理量为

$$N_s = \int_{\tau} \eta \rho d\tau \quad (2.13)$$

式中, ρ 是流体的密度,下标 s 表示是系统的总物理量。例如,如果 N_s 是系统的总质量 m ,即 $N_s = m$,则 $\eta = 1$;如果 N_s 是系统的总动量 \mathbf{K} ,即 $N_s = \mathbf{K}$,则 $\eta = \mathbf{V}$ 。由于系统体积 τ 与时刻 t 有关,因而系统的总物理量 N_s 将是时刻 t 的函数 $N_s(t)$ 。

根据随体导数的定义,系统总物理量 N_s 的变化率为

$$\frac{dN_s}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s(t + \Delta t) - N_s(t)}{\Delta t} \quad (2.14a)$$

式中, $N_s(t + \Delta t) = \int_{\tau(t+\Delta t)} \eta \rho d\tau$,而 $\tau(t + \Delta t)$ 是 $t + \Delta t$ 时刻系统的体积。取控制面 CS 与 t 时刻系统表面重合,从而控制体 CV 与该时刻系统体积 $\tau(t)$ 重合。把 $\tau(t + \Delta t)$ 分

为 τ_1 和 τ_2 两部分,如图 2.3 所示,其中 τ_1 是从控制面 CS 流出的部分, τ_2 是仍在控制体 CV 中的部分。设 τ_3 是由于系统的移动而从控制面外进入控制体的流体体积,显然有

$$\begin{aligned}\tau(t + \Delta t) &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= \tau_1 + (\tau_2 + \tau_3) - \tau_3 \\ &= \tau_1 + \tau - \tau_3\end{aligned}$$

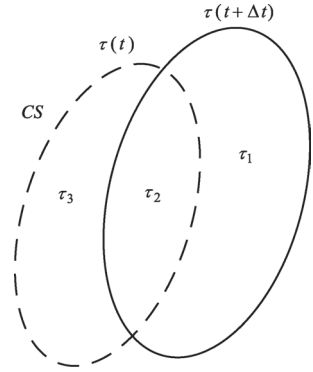


图 2.3 系统与控制体

因此

$$\begin{aligned}\frac{dN_s}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s(t + \Delta t) - N_s(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\tau_1}(t + \Delta t) + N_{\tau_2}(t + \Delta t) - N_{\tau_3}(t + \Delta t) - N_{\tau}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\tau}(t + \Delta t) - N_{\tau}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\tau_1}(t + \Delta t) - N_{\tau_3}(t + \Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}\quad (2.14b)$$

式(2.14b)右端的第一个极限中, $N_{\tau}(t + \Delta t)$ 和 $N_{\tau}(t)$ 是同一空间区域 CV 上不同时刻的积分,因此有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\tau}(t + \Delta t) - N_{\tau}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial N_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho d\tau$$

式(2.14b)右端第二个极限表示单位时间内通过控制面 CS 净流出的流体物理量,即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\tau_1}(t + \Delta t) - N_{\tau_3}(t + \Delta t)}{\Delta t} = \oint_{CS} \eta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

将它们代入(2.14b),得

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho d\tau + \oint_{CS} \eta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

$$\text{或} \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau} \eta \rho d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho d\tau + \oint_{CS} \eta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \quad (2.14c)$$

上式表明,如果取控制体 CV 与某时刻系统体积 τ 重合,则该时刻系统总物理量变化率,等于控制体内物理量变化率与单位时间内通过控制面净流出物理量之和。式(2.14c)称为雷诺输运公式。

2.2.3 连续性方程推导

在流体运动过程中,流场中既无质量源又无质量汇,则在经典力学范围内流体质量既不会增加也不会减少,这就是流体的质量守恒定律。连续性方程是在连续流动的条件下,质量守恒定律的数学表达式。下面根据流体质量守恒定律来推导积分形

式和微分形式的连续性方程。

(1) 连续性方程积分形式

在任一时刻 t , 考虑封闭曲面为 σ 、所包围体积为 τ 的流体系统, 显然该系统的总质量为 $m = \int_{\tau} \rho d\tau$, 根据质量守恒定律

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0 \quad (2.15)$$

这就是流体系统积分形式的连续性方程, 它表明系统的总质量不随时间变化。

取控制体 CV 与 t 时刻的系统体积 τ 重合, 利用雷诺输运公式(2.14c), 取 $\eta=1$, 则由式(2.15)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\tau + \oint_{CS} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (2.16a)$$

或

$$\oint_{CS} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\tau \quad (2.16b)$$

这就是流体控制体积分形式的连续性方程, 它表明通过控制面流体质量的净流出率等于控制体内流体质量的减少率。

(2) 连续性方程微分形式

在流体控制体积分形式的连续性方程(2.16a)中, 将左端第一项中对时间偏导数与对空间区域体积分的运算顺序交换, 对于第二项利用矢量分析中的高斯公式, 则有

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\tau = 0$$

由于控制体 CV 可以任意选取, 因而有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.17)$$

利用公式 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V}$, 再根据随体导数定义, 则上式可写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.18)$$

方程(2.17)和(2.18)都是微分形式的连续性方程, 为了阐明它们的物理意义, 这里先讨论速度散度的物理意义。

根据散度的定义

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} V_n d\sigma}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\tau} = \text{div} \mathbf{V}$$

如果 τ 是控制体, 则 $\mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 表示单位时间内通过面元 $d\sigma$ 流出控制体的流量(或流体体积), $\oint_{\sigma} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 表示流出封闭面 σ 的净流量, 所以当着眼于控制体时, $\text{div} \mathbf{V}$ 表示某时刻某点处流体的相对净流量(或流体体积的相对净流出率)。 $\text{div} \mathbf{V} > 0$ 表示有净流

出; $\operatorname{div}\mathbf{V} < 0$ 表示有净流入。容易理解, $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})$ 表示流体质量的相对净流出率。如果 τ 是系统体积, 则 $\oint_{\sigma} \mathbf{V}_n \cdot d\sigma$ 表示该系统的体膨胀率, 即单位时间内膨胀的体积, 所以当着眼于系统时, $\operatorname{div}\mathbf{V}$ 表示某时刻某点处流体质点的相对体膨胀率。 $\operatorname{div}\mathbf{V} > 0$ 表示流体质点体积膨胀; $\operatorname{div}\mathbf{V} < 0$ 表示流体质点体积收缩。

现在可以来阐明两种微分形式连续性方程的物理意义。方程(2.17)是着眼于流场空间点来描述质量守恒定律的, 它表明: 某时刻流场任一点处流体质量的相对净流出率 $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})$, 等于该点处密度的减少率 $-\partial\rho/\partial t$ 。方程(2.18)是着眼于流体质点来描述质量守恒定律的, 它表明: 某时刻流场任一点处流体质点的相对体膨胀率 $\operatorname{div}\mathbf{V}$, 等于该流体质点密度的相对减少率 $-(1/\rho)d\rho/dt$ 。

根据不同坐标系中散度的表达式, 可以写出连续性方程的不同表达式。例如在直角坐标系 (x, y, z) 中, 连续性方程(2.18)表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

在柱坐标系 (R, φ, z) 中, 有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R\rho v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

在球坐标系 (r, θ, φ) 中, 有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi} = 0 \quad (2.21)$$

2.2.4 两种特殊连续性方程形式

(1) 定常流动连续性方程

如果流体做定常流动, 即 $\partial\rho/\partial t = 0$, 则控制体积分形式的连续性方程(2.16)简化为

$$\oint_{CS} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (2.22)$$

表明通过控制面流体质量的净流出率等于零。考虑一段流管, 取控制面为流管两截面 S_1, S_2 和侧面 Σ 所组成的封闭面(图 2.4), 则由式(2.22)得

$$\int_{S_1} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{S_2} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0$$

由于在流管侧面 Σ 上, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, 则有

$$\int_{S_1} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{S_2} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0$$

式中, \mathbf{n} 是外法向单位矢量。若取法线 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 分别沿截面 S_1 和 S_2 的流动方向一侧, 则有

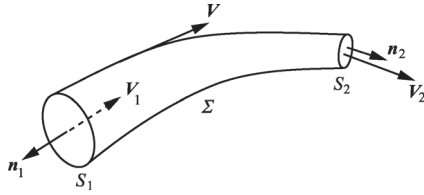


图 2.4 流管中控制体(面)的取法

$$\int_{S_1} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1) d\sigma = \int_{S_2} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2) d\sigma \quad (2.23)$$

表明单位时间内流进流管的流体质量等于流出流管的流体质量,或单位时间内通过流管各截面的流体质量彼此相等。如果流管截面很小,可认为同一截面上各点处流速相同,即

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2 \quad \text{或} \quad \rho V S = \text{const} \quad (2.24)$$

式中, ρ_1, V_1 和 ρ_2, V_2 分别为截面 S_1 和 S_2 处流体的密度和速度。

由式(2.17)可知,定常流动时微分形式的连续性方程为

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.25)$$

表明任一时刻在流场任一点处流体质量的相对净流出率等于零。

(2)不可压缩流体连续性方程

对于不可压缩流体, $d\rho/dt=0$,微分形式的连续性方程(2.18)简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.26)$$

上式物理意义容易通过速度散度来理解,所以不可压缩流体运动又叫作无散运动。

对于控制体有

$$\oint_{CS} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = 0 \quad (2.27)$$

表明通过控制面净流出的流量等于零。对于一段流管,式(2.27)变成

$$\int_{S_1} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1) d\sigma = \int_{S_2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2) d\sigma \quad (2.28)$$

对于截面很小的流管,则有

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad \text{或} \quad V S = C(t) \quad (2.29)$$

式中, $C(t)$ 是与时刻 t 有关的常数。式(2.28)和(2.29)表示流管在同一时刻流进的流量等于流出的流量,或同一时刻通过流管各截面的流量彼此相等。

2.3 流体微团运动

刚体运动可以看成是两种运动的复合:随基点的移动和绕基点的转动。如果选取

刚体上一点 A 作为基点,相对于固定坐标系的速度为 \mathbf{V}_A ,刚体上任一点 P 相对于基点 A 的位置矢量是 \mathbf{r} ,则点 P 的速度为 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$,式中, $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体绕基点 A 转动的瞬时角速度。

流体运动要比刚体运动复杂,任一流块的运动除了移动和转动外,还有变形运动,且某时刻刚体转动可用一个角速度来描述,而某时刻流块上各点的旋转往往是各不相同的。为此,流体力学中取充分小的流块进行分析,这种充分小的流块叫作流体微团,它是由大量流体质点所组成的、线性尺度充分小的流体团。

2.3.1 流体微团速度分解定理

现在讨论某一时刻 t ,任一流体微团的运动。在流体微团上任取一个基点 $M(x, y, z)$ 及其相邻点 $M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$,它们的速度分量分别表示为

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} u' = u'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) \\ v' = v'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) \\ w' = w'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) \end{cases}$$

将 M' 点速度分量进行泰勒(Taylor)级数展开,并略去二阶以上的小量,得

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{cases} \quad \text{或} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.30)$$

式中,位移 $\delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$,矩阵 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{bmatrix}$,它的各分量是速度分量

对空间坐标的偏导数,描述了速度场分布的不均匀程度。显然, $\delta \mathbf{V} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{r}$ 是点 M' 相对于点 M 的相对运动速度。为了对此相对速度进行分析,把矩阵 \mathbf{D} 分解为对称矩阵 \mathbf{S} 和反对称矩阵 \mathbf{A} 之和,即

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{S} + \mathbf{A} = S_{ij} + A_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

其中反对称矩阵 \mathbf{A} 的九个分量中只有三个独立分量, 记为

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V}$$

可见这三个分量构成的矢量正好是速度旋度的 $1/2$ 。且有

$$\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y \delta z - \omega_z \delta y \\ \omega_z \delta x - \omega_x \delta z \\ \omega_x \delta y - \omega_y \delta x \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r}$$

将以上结果代回式(2.30), 得

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.31)$$

下面进一步分析将指出, 矢量 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{V}/2$ 描述了流体微团的旋转, 而矩阵 \mathbf{S} 描述了流体微团的形变, 称矩阵 \mathbf{S} 为形变率矩阵或形变率张量, 而称矩阵 \mathbf{A} 为旋转矩阵或旋转张量。式(2.31)表示, 流体微团上任一点速度 \mathbf{V}' , 等于随基点的平移速度 \mathbf{V} 、绕基点的转动角速度 $(1/2)\text{rot} \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r}$ 以及相对于基点的形变速度 $\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}$ 三者之和。这就是亥姆霍兹速度分解定理。

2.3.2 流体微团变形

(1) 相对线膨胀率(S_{ii})

考察在 xy 平面流场中矩形流块 $ABCD$ 的运动, 如图 2.5 所示, 其边长分别为 δx 和 δy 。为了说明 $S_{xx} = \partial u / \partial x$ 的意义, 假定除 $S_{xx} \neq 0$ 外, 其余分量均为零。由于在 x 方向存在速度梯度, 则在 δt 时间内, 矩形 $ABCD$ 面将运动到 $A'B'C'D'$ 位置, 流体微团沿 x 方向的相对线膨胀率(或相对线形变率)为

$$\frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x\right) \delta t - u \delta t}{\delta x \delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} = S_{xx}$$

用类似方法可以得到 y 和 z 方向上的线膨胀率为

$$S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{和} \quad S_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

若同时考虑三个方向的线形变,即

$$\frac{\left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\delta t\right)\left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\delta t\right)\left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z\delta t\right) - \delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z\delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\mathbf{V}$$

表明流体微团的相对体膨胀率等于沿三个方向的相对线膨胀率之和,即速度的散度。这与 2.2 节中速度散度的物理意义一致。

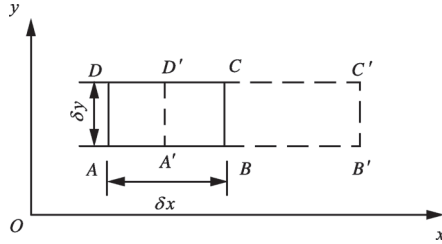


图 2.5 流体微团的线膨胀

(2) 角形变率($S_{ij}, i \neq j$)

考察在 xy 平面流场中一对正交于 M 点的线元 MA 和 MB , 边长分别为 δx 和 δy , 如图 2.6a 所示。为了说明 $S_{xy} = S_{yx} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) / 2$ 的意义, 假定除 $S_{xy} = S_{yx} \neq 0$ 外, 其余分量均为零。由于速度分量 u 和 v 分别沿 y 和 x 有速度梯度, 则在 dt 时间内, M 点邻域内的正交线元 MA 和 MB 分别转过 $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$ 角, 即

$$\delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \quad \text{和} \quad \delta\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t$$

定义 M 点邻域内流体的角形变率为正交于该点的两线元夹角的瞬时变化率, 即

$$\frac{1}{2} \frac{\delta\alpha + \delta\beta}{\delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = S_{xy} = S_{yx}$$

称 S_{xy} 为角形变率, 又称剪形变率。按类似的定义, xz 平面和 yz 平面内的角形变率分别为

$$S_{xz} = S_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{和} \quad S_{yz} = S_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

上述分析表明, 张量 \mathbf{S} 描述了流体微团相对线膨胀率和角形变率, 所以称它为形变率张量。 $\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{r}$ 是流体微团邻近点相对于基点的形变速度, 由

$$\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{r} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx}\delta x + S_{xy}\delta y + S_{xz}\delta z \\ S_{yx}\delta x + S_{yy}\delta y + S_{yz}\delta z \\ S_{zx}\delta x + S_{zy}\delta y + S_{zz}\delta z \end{bmatrix}$$

即可求得形变速度的三个分量,其中, $S_{xx}\delta x$, $S_{yy}\delta y$ 和 $S_{zz}\delta z$ 分别为由流体微团因线膨胀产生的邻近点相对于基点的膨胀速度分量,而 $S_{xy}\delta y + S_{xz}\delta z$, $S_{yx}\delta x + S_{yz}\delta z$ 和 $S_{zx}\delta x + S_{zy}\delta y$ 分别是由于流体微团剪形变产生的邻近点相对于基点的剪形变速度分量。

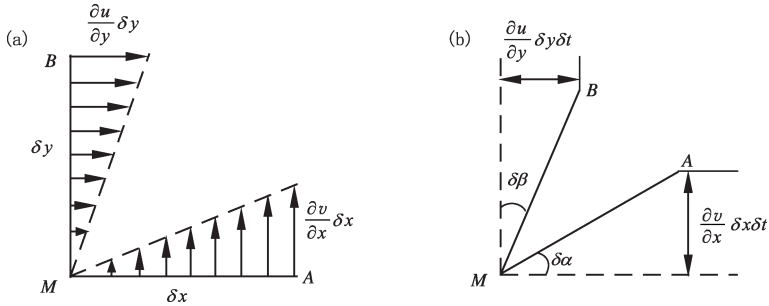


图 2.6 流体微团的角形变

2.3.3 流体微团旋转

考察 xy 平面流场中一对正交线元 MA 和 MB 的旋转运动,设线元边长分别为 δx 和 δy ,规定逆时针方向的旋转为正,参考图 2.6b,则在 dt 时间内, MA 和 MB 绕 M 点旋转角速度分别为

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x \delta t}{\delta x \delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}\delta y \delta t}{\delta y \delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{(顺时针方向)}$$

定义 M 点邻域内流体绕 z 轴旋转角速度为 xy 平面内正交于该点的两线元绕该点的旋转角速度的平均值,即

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \frac{\delta\beta}{\delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

类似地,定义流体在 xz 平面绕 y 轴和在 yz 平面绕 x 轴的平均旋转角速度分别为

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{和} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

上述三个分量构成流体微团的平均旋转角速度矢量,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \end{aligned}$$

所以, $\text{rot} \mathbf{V} \times d\mathbf{r}/2$ 是流体微团邻近点绕基点的旋转角速度。

以上分析表明,流体微团是否旋转以及旋转的强弱程度,取决于速度的旋度。通常又称速度的旋度为涡量,并记作 $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{V}$,显然,涡量等于流体微团平均旋转角速度的两倍。

2.4 无旋运动和速度势

一般情况下,流体运动是平移、旋转和形变三种运动的复合运动。从本节开始,讨论几种特殊的运动,它们是无旋运动、不可压缩流体的平面运动和不可压缩流体的平面无旋运动。本节讨论无旋运动。

2.4.1 速度势引入

如果在任意时刻,流场处处满足

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (2.32)$$

则称流体的运动为无旋运动。如果条件(2.32)不满足,即流场中 $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$,则称流体运动为有旋运动或涡旋运动。在第4章中,将专门讨论涡旋运动。

必须注意,这里说的有旋或无旋,仅指流体微团本身有无旋转,而与流体微团移动的迹线形状无关。从下面的三个例子中,可以做进一步的理解。

(1) 简单剪切流动

速度场为

$$u = ky, \quad v = 0$$

迹线(流线)方程为

$$y = \text{常数}$$

这是平行于 x 轴的直线运动,但

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = -k\mathbf{k} \neq 0$$

表明流动是有旋的,如图 2.7 所示。



图 2.7 简单剪切流动的有旋性

(2) 自由涡流动

速度场为

$$u = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{kx}{x^2 + y^2}$$

迹线(流线)方程为

$$x^2 + y^2 = \text{常数}$$

这是以原点为中心的圆周运动,但

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 0$$

表明流动是无旋的,如图 2.8 所示。

(3) 强迫涡流动

速度场为

$$u = -ky, \quad v = kx$$

迹线(流线)方程为

$$x^2 + y^2 = \text{常数}$$

这也是以原点为中心的圆周运动,而

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 2k\mathbf{k}$$

表明流动是有旋的,如图 2.9 所示。

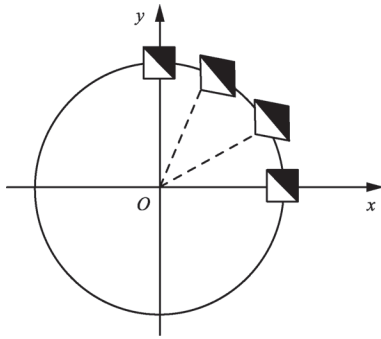


图 2.8 自由涡流动的无旋性

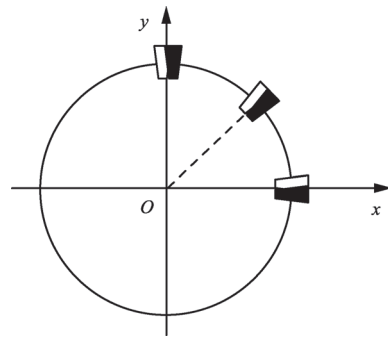


图 2.9 强迫涡流动的有旋性

可以看出,在简单剪切流动中,流体微团的移动是直线运动,但流动却是有旋的;在自由涡和强迫涡流动中,流体微团都做圆周运动,但前者是无旋流动,而后者则是有旋流动。

根据矢量分析,如果 $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ 的各分量在一维单连通区域内对 x, y, z 有连续偏导数,则当 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ 时,有

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

即沿该区域内任一封闭曲线 L 的速度环量等于零。由此可知,沿该区域内任意曲线 l

的速度环量 $\int_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ 与曲线的路径无关,只与端点的位置和时刻 t 有关。在指定时刻 t ,

如果取 l 的起点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 终点为 $M(x, y, z)$, 则曲线积分为

$$\int_{M_0}^M \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} (u dx + v dy + w dz)$$

只与点 M 的坐标 x, y, z 和时刻 t 有关,而与路径无关。也就是说,被积式 $u dx + v dy + w dz$ 是某一标量场函数 $\phi(x, y, z, t)$ 对空间的全微分 $\delta\phi$, 即

$$\delta\phi = u dx + v dy + w dz \quad (2.33)$$

式中, $\partial\phi/\partial x = u, \partial\phi/\partial y = v, \partial\phi/\partial z = w$, 于是

$$\text{grad}\phi = \mathbf{V} \quad \text{或} \quad \nabla\phi = \mathbf{V} \quad (2.34)$$

总之, 如果流体的运动是无旋运动, 即 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, 则必存在一个标量场函数 $\phi(x, y, z, t)$, 使 $\mathbf{V} = \nabla\phi$, 这个标量场函数 $\phi(x, y, z, t)$ 就称为速度场 \mathbf{V} 的势函数, 简称速度势。无旋运动是速度势存在的充分和必要条件, 无旋必有势, 有势必无旋, 所以无旋流动又称势流。

由于速度势是标量, 因此, 无旋流动中引入速度势, 会使问题研究简化。已知速度势 ϕ , 利用式(2.33)计算速度场。容易导出在其他坐标系中的表达式为

$$v_R = \frac{\partial\phi}{\partial R}, \quad v_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (\text{柱坐标系})$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \quad (\text{球坐标系})$$

2.4.2 速度势性质

(1) 同一速度场可以有不同的速度势, 它们之间只相差一个与时刻 t 有关的常数。

事实上, 设 ϕ 和 ϕ' 都是速度场 \mathbf{V} 的速度势, 则有 $\nabla\phi = \mathbf{V}$ 和 $\nabla\phi' = \mathbf{V}$ 。从而

$$\nabla(\phi - \phi') = \nabla\phi - \nabla\phi' = 0$$

表明 $\phi - \phi'$ 对空间坐标的偏导数都等于零, 于是

$$\phi - \phi' = C(t) \quad \text{或} \quad \phi = \phi' + C(t)$$

式中, $C(t)$ 是 t 的任意函数, 对确定的 t , 它是一个常数。由此证明: 同一速度场对应的不同速度势之间只相差一个与 t 有关的常数。这些速度势(相差一个与 t 有关的常数)所求出的速度场是唯一的。

(2) 速度势具有可加性, 即如果某无旋流动可以看成若干个简单势流的叠加, 则这几个简单势流的速度势之和等于复合运动的速度势。

事实上, 设 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, 且 ϕ_1 为 \mathbf{V}_1 的速度势, ϕ_2 为 \mathbf{V}_2 的速度势, 即 $\mathbf{V}_1 = \nabla\phi_1$ 和 $\mathbf{V}_2 = \nabla\phi_2$, 则

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \nabla\phi_1 + \nabla\phi_2 = \nabla(\phi_1 + \phi_2)$$

表明 $\phi = \phi_1 + \phi_2$ 为 \mathbf{V} 的速度势。在实际应用中, 往往根据这个性质, 把一个比较复杂无旋流动, 分解为若干个简单势流的叠加, 而这些简单势流的速度势是已知的, 将它们相加便得到复杂无旋流动的速度势。

(3) 在无旋流场中, 某时刻沿任一曲线的速度环量, 等于终点与起点处速度势值之差。

将式(2.33)两端沿任意路径从点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到点 $M(x, y, z)$ 积分, 得

$$\Gamma_{M_0M} = \int_{M_0}^M \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_{M_0}^M (u dx + v dy + w dz) = \phi(M, t) - \phi(M_0, t) \quad (2.35a)$$

根据这一性质,已知无旋流场的速度势,求速度环量时不必再计算沿曲线积分,它等价于求该曲线两端点处速度势值之差。将上式改写成

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x_0, y_0, z_0, t) + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (u dx + v dy + w dz) \quad (2.35b)$$

这也是由速度场求速度势的公式,其中 M_0 处速度势任意选定,右端曲线积分与路径无关,可选择由平行于坐标轴的直线段组成的折线,以便将曲线积分化为定积分。

(4) 流线与等势面(线)正交。

事实上, $\mathbf{V} = \nabla \phi$, 而根据 $\nabla \phi$ 的几何意义,它是沿等势面的法线指向速度势 ϕ 增加的方向,故流线与等势线(面)正交,如图 2.10 所示。

(5) 在单连通域内,无旋流体的速度势为单值函数,流线不可能闭合;在复连通域内,无旋流动的速度势为多值函数,流线可以闭合。

因为在单连通域内,对于任意封闭曲线 L ,利用斯托克斯公式,有

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

假定上述曲线积分是从点 M 开始,沿 L 一周回到点 M , M 作为起点时的速度势值记为 ϕ_M ,作为终点时的速度势值记为 $\phi_{M'}$,则

$$\phi_{M'} - \phi_M = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

表明速度势 ϕ 是空间点的单值函数。现在假定在单连通域内,流线是闭合的,取 L 为此流线,则应有 $\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$,这与前面的结论矛盾。所以单连通域内的无旋流动,流线不可能闭合。

在复连通区域,如果封闭曲线 L 是不可收缩的,即不可能找到该区域内的一块曲面 σ 张于 L 上,因而也就不能利用斯托克斯公式证明速度环量 $\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ 等于零。也就是说,在复连通域内,可能存在这样的封闭曲线 L ,使

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

因此,在复连通域内流线可以闭合。例如,对于自由涡流动,利用极坐标 (r, θ) 表示的速度场为

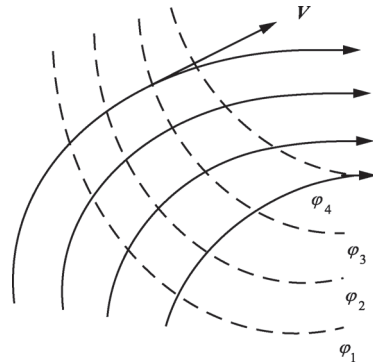


图 2.10 流线与等势面正交

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{k}{r}$$

对于以 r 为半径的圆周 L_r (也是一条流线), 有

$$\oint_{L_r} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi k$$

但流动在除原点以外的平面双连通域内是无旋的。

现在仅以平面双连通域为例, 讨论速度势的多值性。如图 2.11 所示, 设有一平面无旋流场具有内边界 L_0 , 可以证明, 沿流场中包围 L_0 的任意封闭曲线的速度环量彼此相等。对于其中的任意一条封闭曲线 L , 设速度环量 $\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$, $M(x, y, z)$ 是曲线 L 上的任意一点, 它作为起点时的速度势值记为 ϕ_M , 作为终点时的速度势值记为 $\phi_{M'}$, 则

$$\phi_{M'} - \phi_M = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma$$

即每绕包围内边界的任意封闭曲线一周, 速度环量增加一个 Γ 值, 若绕 n 周, 则速度环量为 $n\Gamma$ 。说明在双连通域中, 速度势是空间的多值函数, 它们的差是绕内边界一周的速度环量 Γ 的整数倍。

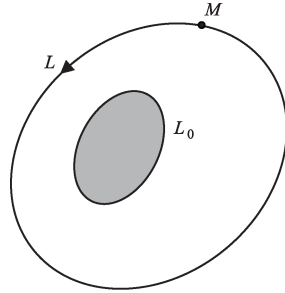


图 2.11 平面双连通域

2.4.3 无旋运动连续性方程

由于在无旋运动中存在速度势 ϕ , 且 $\mathbf{V} = \nabla \phi$, 代入连续性方程(2.18), 得

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.36)$$

方程(2.36)就是无旋运动的连续性方程。如果已知速度场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{V} = F(x, y, z, t)$, 则有

$$\nabla^2 \phi = F(x, y, z, t) \quad (2.37)$$

表明速度势 ϕ 满足泊松方程。如果流体是不可压缩的, 即 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 则有

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.38)$$

表明不可压缩流体做无旋运动时, 速度势满足拉普拉斯方程, 即速度势为调和函数。

2.5 不可压缩流体平面运动和流函数

所谓平面运动, 是指任意时刻, 流场中各点的速度都平行于某一固定平面, 并且

各物理量在此平面的垂直方向上没有变化。例如,在 xy 平面内的运动数学上满足

$$w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

当流体做平面运动时,只需研究某一平面上的流动规律,即可掌握平行于该平面的所有平面上的流动规律。对于不可压缩流体的平面运动,可进一步引入一个标量场函数来进行描述,这个标量场函数就是流函数。

2.5.1 流函数引入

对于不可压缩流体在 xy 平面的平面运动,连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.39)$$

根据格林(Green)定理,上式正是 $-vdx + udy$ 为某一标量场函数 $\psi(x, y, t)$ 对空间全微分的充分和必要条件。也就是说,如果不可压缩流体在 xy 平面单连通域内做平面运动,则存在一个标量场函数 $\psi(x, y, t)$ 使

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \quad (2.40)$$

这个标量场函数 $\psi = \psi(x, y, t)$ 就称为该不可压缩流体平面运动的流函数。由式(2.40)可知,流函数 ψ 与速度分量 u, v 的关系为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \quad (2.41)$$

因此,速度场表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} \times \mathbf{k} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \nabla\psi \times \mathbf{k} \\ &= \nabla \times (\psi\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

上式表明, $\psi\mathbf{k}$ 是无散速度场 \mathbf{V} 的矢量势。容易推导,流函数与极坐标 (r, θ) 中速度分量的关系为

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -v_\theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = v_r \quad (2.43)$$

由于流函数是标量,在研究不可压缩流体平面运动时引入流函数,可以简化问题。已知流函数,利用式(2.41)或(2.43)求得速度场。若已知速度场,将式(2.42)沿任意路径从点 $M_0(x_0, y_0)$ 到点 $M(x, y)$ 积分,得

$$\psi(x, y, t) = \psi(x_0, y_0, t) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-vdx + udy) \quad (2.44)$$

由此式求流函数。

2.5.2 流函数性质

(1)同一速度场可以有不同的流函数,但它们之间只相差一个与 t 有关的常数。

事实上,如果 ψ 和 ψ' 都是平面的无散速度场的流函数,则有

$$\frac{\partial(\psi - \psi')}{\partial x} = -v - (-v) = 0, \quad \frac{\partial(\psi - \psi')}{\partial y} = u - u = 0$$

从而 $\psi - \psi' = C(t)$, 即同一速度场所对应的不同流函数之间只相差一个与 t 有关的常数。通常忽略常数项的差别,认为一个确定速度场的流函数是唯一的。

(2) 流函数具有可加性,即如果某平面的无散流动可以看成若干简单平面的无散流动的叠加,则这几个简单平面的无散流动的流函数之和等于复合运动的流函数。

事实上,设平面的无散运动速度场 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 均是无散运动,如果 ψ_1 和 ψ_2 分别为它们的流函数,则有

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \nabla \times (\psi_1 \mathbf{k}) + \nabla \times (\psi_2 \mathbf{k}) = \nabla \times [(\psi_1 + \psi_2) \mathbf{k}]$$

表明 $\psi = \psi_1 + \psi_2$ 是 \mathbf{V} 的流函数。

(3) 在平面的无散运动中,某时刻通过某一曲线的流量等于该曲线两端点处的流函数数值之差。

如图 2.12 所示,通过曲线 \overline{AB} 上线元 dl 的流量为

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dl \cdot 1 &= [u \cos(n, x) + v \cos(n, y)] dl = \left[u \cos \alpha + v \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right] dl \\ &= (u \cos \alpha - v \sin \alpha) dl = \left(u \frac{dy}{dl} - v \frac{dx}{dl} \right) dl = -v dx + u dy \\ &= \delta \psi \end{aligned}$$

因此,通过曲线 \overline{AB} 的流量是

$$Q_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dl = \int_{\overline{AB}} -v dx + u dy = \int_{\overline{AB}} \delta \psi \quad (2.45)$$

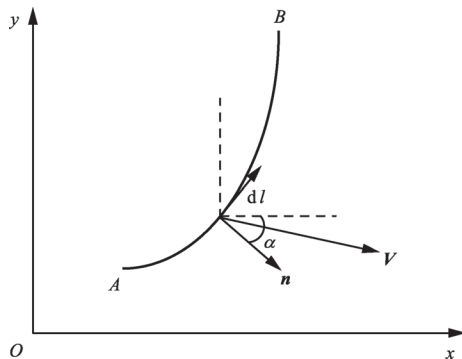


图 2.12 通过一段曲线的流量

(4) 等流函数线就是流线。

因为在等流函数线上 $\delta \psi = 0$, 即 $-v dx + u dy = 0$, 亦即

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

表明等流函数线上的点满足平面运动的流线方程,所以等流函数线就是流线。因此,已知流函数求流线时,不必再解流线方程,只需令流函数等于常数即可,该常数依所指定时刻和流线过某空间点的位置而定。

对于不可压缩流体的平面无旋运动,既存在速度势也存在流函数,等势线族和流线族(等流函数线族)构成一个正交网,称为流网。有了流网图,可以直观地了解流体的运动情况。

2.5.3 流函数与涡量关系

在 xy 面的平面流动涡量只有其 z 分量,利用流函数 ψ 和速度的关系,见式(2.41),有

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad \text{或} \quad \nabla^2 \psi = -\Omega_z \quad (2.46)$$

表明流函数的拉普拉斯量等于涡量 Ω_z 的负值。如果知道涡量场,可以借平面泊松方程(2.46)求流函数 ψ 。如果流体的运动又是无旋的,即 $\Omega_z = 0$,则有

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.47)$$

表明对于不可压缩流体的平面流动,流函数满足平面拉普拉斯方程,即流函数是调和函数。

2.6 不可压缩流体平面无旋运动和复势

平面不可压缩流体无旋运动(或平面无散势流),既存在速度势,也存在流函数,它们组成一个复变函数,称为复势。因此,复变函数的理论在解决平面无散势流的问题中有着十分重要的应用,可以方便地得出一些重要而有用的结论。

2.6.1 复势引入

平面无散势流,既存在速度势 ϕ ,也存在流函数 ψ ,不妨假定流动是定常的,它们可以表示为 $\phi = \phi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ (如果流动是非定常的,则是指某一指定时刻的),且两者都是调和函数,即

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.48)$$

根据它们各自与速度场的关系,有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.49)$$

表明速度势 $\phi(x, y)$ 和流函数 $\psi(x, y)$ 之间满足柯西-黎曼条件,是一对共轭调和函

数。根据复变函数理论,它们可以组成一个复变函数

$$W = f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.50)$$

它是在流动区域上复变数 $z = x + iy$ 的解析函数,该复变函数就称为平面无散势流的复势。显然,如果给出了复势,就容易求得速度势和流函数,也容易确定流动的特征。一个特定的复势代表特定的平面无散势流,不同的复势代表不同的平面无散势流。因此,复势是平面无散势流的特征函数。

由于平面无散势流的速度势和流函数满足拉普拉斯方程,根据拉普拉斯方程边值问题的唯一性定理,在给定边界条件下方程的解是唯一的,因此,一个平面无散势流的复势完全由其边界条件确定。在实际应用中,一个复变函数 $W = f(z)$ 是否为一平面无散势流的复势,只需检查它是否满足流动的边界条件。

2.6.2 平面无散势流

由于复势是平面无散势流的特征函数,因此,可以直接利用复势来研究平面无散势流。

(1) 求速度势和流函数

根据复势定义式(2.50),如果给定某平面无散势流的复势 $W = f(z)$,则它的实部就是速度势,虚部就是流函数,即

$$\operatorname{Re}f(z) = \phi(x, y), \quad \operatorname{Im}f(z) = \psi(x, y) \quad (2.51)$$

然后令 $\phi(x, y) = \text{常数}$, $\psi(x, y) = \text{常数}$,便得到等势线和流线,它们是两组互相正交的平面曲线,构成了直观描述该平面无散势流的流网。

(2) 求速度

由于复势 $W = f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ 是流动区域上的解析函数,根据复变函数理论

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.52)$$

再利用速度与速度势及流函数的关系式(2.49),得

$$\frac{dW}{dz} = f'(z) = u - iv \quad (2.53)$$

因速度矢量 \mathbf{V} 的复势表示为 $\mathbf{V} = u + iv$,故式(2.53)表明:复势对复变数的导数等于速度的共轭值,称之为复速度。所以,用复数表示流场中任意一点的速度可写为

$$\mathbf{V} = u + iv = \overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)} = \overline{f'(z)} \quad (2.54)$$

(3) 求速度环量和流量

设 L 是流动区域上的任一条曲线, 考查复速度 dW/dz 沿 L 的积分

$$\int_L \frac{dW}{dz} dz = \int_L (u - iv)(dx + idy) = \int_L (udx + vdy) + i \int_L (-vdx + udy)$$

可以看出, 其实部和虚部分别是沿曲线 L 的速度环量和流量, 即

$$\int_L (udx + vdy) = \Gamma \quad \text{和} \quad \int_L (-vdx + udy) = Q$$

因此

$$\int_L \frac{dW}{dz} dz = \Gamma + iQ \quad (2.55)$$

$\Gamma + iQ$ 称为沿曲线 L 的环量, 求环量的问题, 也就是求复速度 $dW/dz = f'(z)$ 的积分问题。

如果 L 是封闭曲线, 复势 $W = f(z)$ 在 L 所围闭区域上解析, 从而复速度 $dW/dz = f'(z)$ 也在该区域上解析, 则根据复变函数理论中柯西积分定理, 即

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \oint_L f'(z) dz = 0 \quad \text{或} \quad \Gamma + iQ = 0$$

从而有, $\Gamma = 0$ 和 $Q = 0$ 。

如果在封闭曲线 L 所围区域上, 复速度 $dW/dz = f'(z)$ 除了在有限个孤立奇点 a_1, a_2, \dots, a_n 外均解析, 则根据留数定理, 有

$$\oint_L f'(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f'(z)$$

从而

$$\Gamma = \text{Re}[2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f'(z)], \quad Q = [2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f'(z)] \quad (2.56)$$

式中, $\text{Res}_{z=a_k} f'(z)$ 表示复速度 $f'(z)$ 在点 a_k 的留数, 即 $f'(z)$ 在 a_k 的某无心邻域内洛朗(Laurent)级数展开式中 $(z - a_k)^{-1}$ 项的系数。

上面仅从运动学角度介绍了利用复势研究平面无散势流的几个问题。在流体力学中, 复变函数理论的应用还很多。在第 3 章中讨论绕流问题时, 还将介绍如何利用复势来计算流体对物体的作用力和力矩。

2.6.3 几种简单复势

根据速度势和流函数的可加性, 容易推断出复势也具有可加性。换句话说, 如果某平面无散势流可以看成若干个简单的平面无散势流的叠加, 则这些简单平面无散势流的复势之和就等于复合运动的复势。在实际应用中, 对于一个比较复杂的平面无散势流, 可以猜想它由某几个简单平面无散势流的叠加, 假设复合运动的复势等于这几个简单平面无散势流的复势之和, 其结果满足流动的边界条件, 则假设就是正确

的。因此,有必要掌握一些简单的平面无散势流复势的表达式。

(1) 均匀流动: $W = Az$

它是复变数 z 的线性函数,其中 A 是复常数。令 $A = a + ib, z = x + iy$,则有

$$W = (ax - by) + i(bx + ay)$$

因此,速度势和流函数分别为

$$\phi = ax - by, \quad \psi = bx + ay$$

从而等势线和流线分别为

$$y = \frac{a}{b}x + C_1, \quad y = -\frac{b}{a}x + C_2$$

其中, C_1 和 C_2 都是任意常数。由此可见,等势线是一族以 a/b 为斜率的平行直线(图 2.13 中虚线),流线是一族以 $-b/a$ 为斜率的平行直线(图 2.13 中实线)。

速度场为

$$\mathbf{V} = \overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)} = \bar{A} = a - ib = u + iv$$

可见,线性函数 $W = Az$ 表示沿 xy 平面均匀流动。特别地,如果 $A = U$ 是实数,则速度势为 $\phi = Uy$,流函数为 $\psi = Ux$,从而知等势线和流线分别为 $x = \text{常数}$ 和 $y = \text{常数}$,速度场 $u = U$ 和 $v = 0$,它是平行于 x 轴的统一流动。

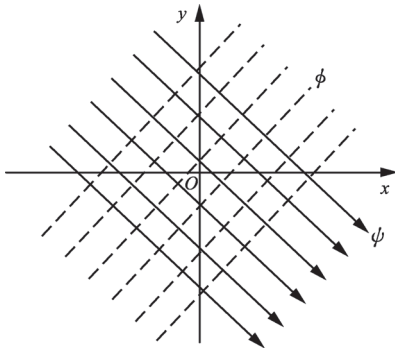


图 2.13 均匀流动

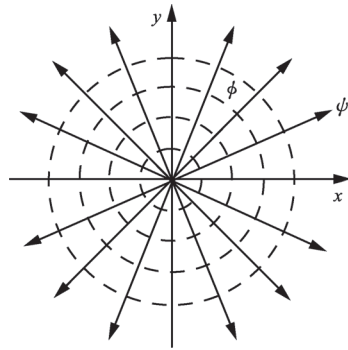


图 2.14 点源($Q > 0$)

(2) 点源(或点汇): $W = \frac{Q}{2\pi} \ln z$

这里 Q 是实常数。令 $z = re^{i\theta}$,则有

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta$$

因此,速度势和流函数分别为

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

从而等势线和流线分别为

$$r = \text{常数}, \quad \theta = \text{常数}$$

由此可见,等势线为一族以原点为中心的同心圆(图 2.14 中虚线),流线为一族从原点出发(或汇聚于原点)的射线(图 2.14 中实线)。

速度场为

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

可见,当 $Q > 0$ 时,流线从原点出发;当 $Q < 0$ 时,流线汇聚于原点。

任取一包围原点的封闭曲线 L ,则沿 L 的环流量为

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \oint_L \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} \right) = iQ$$

表明沿 L 没有速度环量,而 Q 就是通过曲线 L 的流量。由于原点 $z = 0$ 是复速度 $dW/dz = Q/(2\pi z)$ 唯一的孤立点,因此,当封闭曲线 L 不包围原点时,沿 L 的环流量为零。原点是流场唯一的源头($Q > 0$)或汇穴($Q < 0$)。所以,复势所表示的流场称为点源或点汇流场,而实数 Q 称为该点源或点汇的强度。

$$(3) \text{ 点涡: } W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

这里 Γ 是实常数,令 $z = re^{i\theta}$,则有

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(re^{i\theta}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

因此,速度势和流函数分别为

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

从而等势线和流线分别为

$$\theta = \text{常数}, \quad r = \text{常数}$$

由此可见,等势线是一族通过原点的射线(图 2.15 中虚线),流线是一族以原点为中心的同心圆(图 2.15 中实线)。

速度场为

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

可见,当 $\Gamma > 0$ 时,流动沿逆时针方向;当 $\Gamma < 0$ 时,流动沿顺时针方向。

任取一封闭曲线包围原点,则沿 L 的环量为

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \oint_L \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} dz = \Gamma$$

表明通过 L 没有流量, 而 Γ 就是沿 L 的速度环量。如果封闭曲线 L 不包围原点, 则沿 L 的环量为零。所以, 复势所代表的流场称为点涡流场, Γ 称为该点涡的强度。

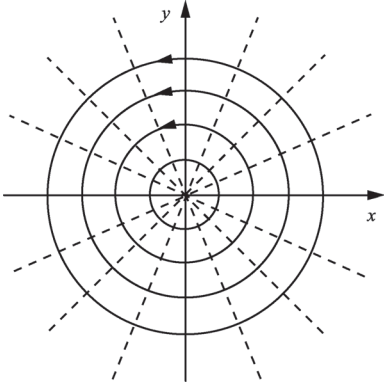
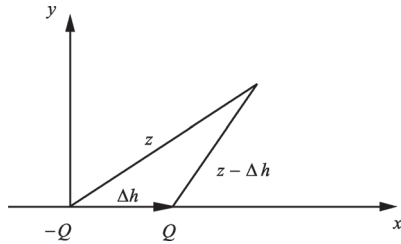
图 2.15 点涡 ($\Gamma > 0$)

图 2.16 偶极子

$$(4) \text{ 偶极子: } W = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}$$

这是一个反比函数, 它表示偶极子流场。所谓偶极子, 就是强度相等的点源和点汇在彼此无限靠近时的叠加。这里 M 为偶极矩, 定义为 $M = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (Q \cdot \Delta z)$, 它表示两个相距 Δz 、强度 Q 相等的点源和点汇, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时, 乘积 $(Q \cdot \Delta z)$ 保持不变, 故要求 Q 应不断增大。

为简单起见, 考虑源汇沿 x 轴分布。由于流场性质不仅与偶极矩 M 大小有关, 而且与源汇的分布有关, 所以偶极矩是有方向的, 规定偶极矩的指向为由汇指 toward 源。在源汇沿 x 轴分布的情况下, M 取值有正负之分, 若指向与 x 轴方向一致则为正值, 反之为负值。为此, 在原点 $(0, 0)$ 和点 $(h, 0)$ 处分别设置一个强度为 $-Q$ 和 Q 的汇和源, 如图 2.16 所示, 它们的复势分别为

$$W_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad W_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \Delta h)$$

偶极矩 $M > 0$, 且 $M = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (Q \cdot \Delta h)$ 。两者叠加后得

$$W_1 + W_2 = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - \Delta h) - \ln z]$$

因此, 偶极子的复势为

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - \Delta h) - \ln z] = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[\frac{Q \cdot \Delta h}{2\pi} (-1) \frac{\ln(z - \Delta h) - \ln z}{-\Delta h} \right] \\ &= -\frac{M}{2\pi} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\ln(z + \Delta z) - \ln z}{\Delta z} = -\frac{M}{2\pi} \frac{d \ln z}{dz} \end{aligned}$$

$$= -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}$$

将 $z = x + iy$ 代入上式,得

$$W = -\frac{M}{2\pi} \frac{\bar{z}}{z^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

从而速度势和流函数分别为

$$\phi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

则等势线为

$$x^2 + y^2 = 2C_1x \quad \text{或} \quad (x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2 \quad (C_1 \text{ 是任意实数})$$

它是一族中心在 x 轴上的过原点的圆(图 2.17 中虚线)。

等流函数线(流线)为

$$x^2 + y^2 = 2C_2y \quad \text{或} \quad x^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2 \quad (C_2 \text{ 是任意实数})$$

它是一族中心在 y 轴上的过原点的圆

(图 2.17 中实线)。

偶极子的复速度为

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

所以,速度场为

$$u = \frac{M}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v = \frac{M}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

速度大小为 $|\mathbf{V}| = |dW/dz| = (M/2\pi)(1/z^2)$

$= (M/2\pi)(1/r^2)$, 可见,流速大小与距离 r^2

成反比。流体从原点沿 x 轴向一方散开,又从

另一方沿 x 轴汇于原点。图 2.17 中的箭头所示为 $M > 0$ 时的流动方向。

(5) 拐角绕流: $W = az^n$ (a 为常数, $n \geq 1/2$)

这是幂函数,令 $z = re^{i\theta}$, 得

$$W = ar^n e^{in\theta} = ar^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

因此,速度势和流函数分别为

$$\phi = ar^n \cos n\theta, \quad \psi = ar^n \sin n\theta$$

首先讨论零流线,即流函数等于零的流线,即

$$ar^n \sin n\theta = 0 \quad \text{或} \quad \theta = k \frac{\pi}{n} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

它是从坐标原点出发的射线。可以认为流动是 $\alpha = \pi/n$ 的角状区域,零流线是该区域的边界线。在流动区域内,流线应满足

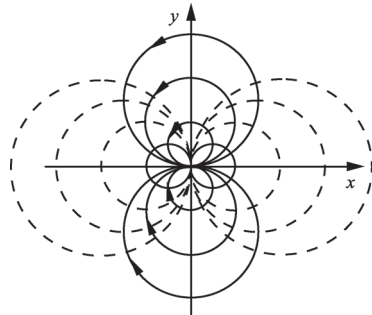


图 2.17 偶极子流场的流网

$$ar^n \sin n\theta = C \quad \text{或} \quad r = \left(\frac{C}{a}\right)^{1/n} \frac{1}{(\sin n\theta)^{1/n}}$$

式中, C 为任意常数。两条相邻的零流线相当于两个相交的壁面, 所以, 上述复势代表相交壁面内的流动。 $n > 1$ 代表凹拐角区域内的流动; $n = 1$ 代表均匀流动; $n < 1$ 则代表凸拐角区域内的流动, 如图 2.18 所示。应当指出, $n < 1/2$ 无意义, 因为不存在相应的壁面。

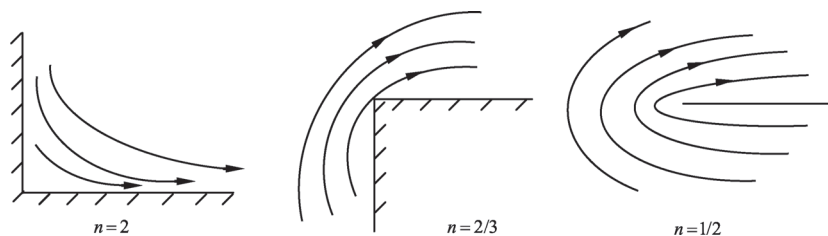


图 2.18 拐角区域内的流动

应用例

例 1 用拉格朗日表达式求流体质点的速度和加速度

设流体运动位置的拉格朗日表达式为

$$x = a + (1+b)t, \quad y = b + ct^2, \quad z = (a-b)t + c$$

式中, a, b, c 为常数。试求在 $t=0$ 时, 位于 $x=1, y=2, z=3$ 处的流体质点的速度和加速度。

解: 先求速度和加速度的一般表达式, 有

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = (1+b), \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = 2ct, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} = a-b$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = 2c, \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

再将 $t=0$ 和 $x=1, y=2, z=3$ 代入位置的拉格朗日表达式, 求得 $a=1, b=2, c=3$ 。最后将 a, b, c 代入速度和加速度的一般表达式, 得

$$u = 3, \quad v = 0, \quad w = -1$$

$$a_x = 0, \quad a_y = 6, \quad a_z = 0$$

例 2 欧拉表达式转换为拉格朗日表达式问题

流体运动速度的欧拉表达式为 $u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$ 。求位置的拉格朗日表达

式。

解:要转换为拉格朗日变数,须着眼于同一流体质点,将 x, y, z 看作是流体质点在不同时刻的位置,则 x, y, z 是时间 t 的函数,则有

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (1)$$

积分第三式得 $z=c$, 对第一、二式求导,有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega \frac{dx}{dt} = -\omega^2 y \quad (2)$$

上述两个常微分方程的解分别为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \quad (3)$$

式中, A_1, A_2 和 ϕ_1, ϕ_2 是积分常数,它们由流体质点的初始位置和初始速度决定。假定 $t=0$ 时, $x=a, y=b$, 从而 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\omega b, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \omega a$, 代入式 (3) 和 (1), 有

$$a = A_1 \cos \phi_1, \quad b = A_2 \cos \phi_2 = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi_2\right)$$

$$b = A_1 \sin \phi_1, \quad a = -A_2 \sin \phi_2 = A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_2\right)$$

从而 $A_1 = A_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ 和 $\phi_1 = \phi_2 + \pi/2 = \arctg(b/a)$ 。最后得位置的拉格朗日表达式为

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos[\omega t + \arctg(b/a)] \\ y &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin[\omega t + \arctg(b/a)] \\ z &= c \end{aligned}$$

例 3 利用流体质点导数公式预报气温变化

设北京气温为 10°C , 南京气温为 15°C , 两地相距 1000 km , 由北京向南京流动的气流速度为 12 m/s 。若在流动过程中空气温度不变, 试问南京气温变化率是多少? 若在流动过程中气温变化率是 0.1°C/h , 南京气温变化率又是多少?

解:取 Ox 轴由北京指向南京, 则有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \frac{dT}{dt} - u \frac{\partial T}{\partial x}$$

因 $u=12\text{ m/s}=43.2\text{ km/h}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{15-10}{1000} = 0.005^\circ\text{C/km}$, 当流动过程中气温不变

时, 即 $\frac{dT}{dt} = 0$, 有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} = -43.2 \times 0.005 \approx -0.216^\circ\text{C/h}$$

表明南京气温平均每小时下降 $0.216\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。当 $\frac{dT}{dt}=0.1\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ 时,有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - u \frac{\partial T}{\partial x} = 0.1 - 43.2 \times 0.005 = -0.116\text{ }^{\circ}\text{C/h}$$

表明南京气温平均每小时下降 $0.116\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。

例4 求流线和迹线

已知平面流场的速度分布为 $u=x+t$, $v=-y+t$ 。求:(1)在 $t=0$ 时刻,过点 $(-1,-1)$ 的流线;(2)在 $t=0$ 时刻,位于 $(-1,-1)$ 的流体质点的迹线。

解:(1)根据流线方程,得

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}$$

将上式积分(t 看作常数),得

$$(x+t)(y-t) = C$$

式中, C 是积分常数,将 $t=0, x=-1, y=-1$ 代入上式得 $C=1$ 。因此, $t=0$ 时刻,过点 $(-1,-1)$ 的流线为

$$xy = 1$$

这是在第三象限的一支双曲线(图 2.19 中曲线 L_1)。

(2)将速度的欧拉表达式变换为位置的拉格朗日表达式,为此将速度表达式改写成

$$\frac{dx}{dt} = x+t, \quad \frac{dy}{dt} = -y+t \quad ①$$

两式右端 x 和 y 看作是 t 的函数。在第一式中,令 $\mu = x+t$,得

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu + 1$$

对上式积分有 $\mu+1=C_1 e^t$,从而得

$$x = C_1 e^t - t - 1 \quad ②$$

用同样的方法可求得

$$y = C_2 e^{-t} + t - 1 \quad ③$$

式②和③中的 C_1 和 C_2 是积分常数,将 $t=0, x=-1, y=-1$ 代入,得 $C_1=C_2=0$ 。因此, $t=0$ 时刻,位于 $(-1,-1)$ 的流体质点的迹线参数方程为

$$x = -t - 1, \quad y = t - 1$$

将以上两式消去 t ,得

$$x + y + 2 = 0$$

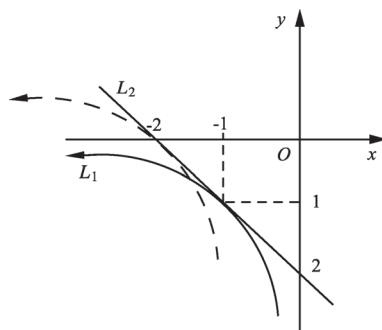


图 2.19 流线和迹线

这是过点 $(-1, -1)$ 且斜率为 -1 的直线,见图 2.19 中的直线 L_2 。

例 5 连续性方程在一维管道流中的应用

不可压缩流体从半径为 R 的圆管入口端以均匀速度 V_0 流入管内,经过一定距离后,圆管内流体的速度完全发展为抛物型分布,即 $V = V_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$,其中 r 是离管轴的距离。试求管内流动完全发展为抛物型分布时的最大速度 V_m 。

解:如图 2.20 所示,将整个入口段取作控制体,设 S_1 和 S_2 分别为圆管入口端截面和流动完全发展为抛物型分布处的截面。由于流体不可压缩,有

$$\oint_{CS} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0$$

考虑到管壁无渗透,圆管即是一个流管,则有

$$\int_{S_1} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1) d\sigma = \int_{S_2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2) d\sigma$$

式中,左边 $= \int_{S_1} V_0 d\sigma = \pi R^2 V_0$,右边 $= \int_0^R V_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 V_m$,代入上式得

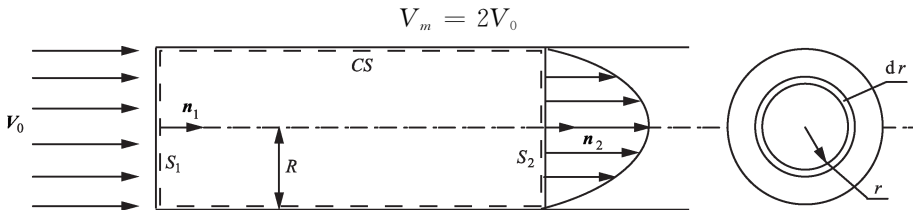


图 2.20 圆管的入口流

例 6 利用连续性方程求速度分量问题

在不可压缩流体的平面定常流动中,若速度的径向分量为 $v_r = -A \cos\theta / r^2$,式中 A 为常数,求速度的横向分量表达式。

解:根据极坐标系中不可压缩流体的连续性方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

得

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A \cos\theta}{r} \right) = - \frac{A \cos\theta}{r^2}$$

对 θ 积分,得

$$v_\theta = \int \left(- \frac{A \cos\theta}{r^2} \right) d\theta + C(r) = - \frac{A \sin\theta}{r^2} + C(r)$$

式中, $C(r)$ 是 r 的任意函数。

例7 利用连续性方程求密度变化规律

设有一平面流场, 速度分布为 $u = 0, v = ky$ 。求在 $t = 0$ 时刻, 密度为 ρ_0 的流体质点密度随时间的变化关系。

解: 以流体质点为研究对象, 研究其密度随时间的变化。根据题设的速度分布, 有

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = k$$

由连续性方程, 得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}\mathbf{V} = -k\rho$$

积分得

$$\rho = Ce^{-kt}$$

利用初始条件 $t = 0$ 时, $\rho = \rho_0$, 代入上式确定 $C = \rho_0$, 于是有

$$\rho = \rho_0 e^{-kt}$$

当 $k > 0$ 时, 流体质点的密度随时间而减小, 此时 $\operatorname{div}\mathbf{V} > 0$, 流体质点有体膨胀; 反之, 当 $k < 0$ 时, 流体质点的密度随时间而增大, 此时 $\operatorname{div}\mathbf{V} < 0$, 流体质点有体收缩。

例8 利用速度分解定理求流体的形变和旋转运动

设有一平面速度场, 场中任一点处的速度大小与原点到此点的距离 r 成反比, 方向垂直于径向, 试分析流体的运动。

解: 根据已知条件

$$|\mathbf{V}| = \frac{k}{r}$$

由图 2.21 可知速度场为

$$u = -\frac{k}{r} \sin\theta = -\frac{ky}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{k}{r} \cos\theta = \frac{kx}{x^2 + y^2}$$

这是定常流动。

(1) 平移运动

分析 M 点邻域内流体的运动, 则流体微团的平移速度就是 M 点速度

$$\mathbf{V}_{\text{平移}} = \mathbf{V}_M = \frac{-ky\mathbf{i} + kx\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

容易求得流线(也是迹线)族方程为

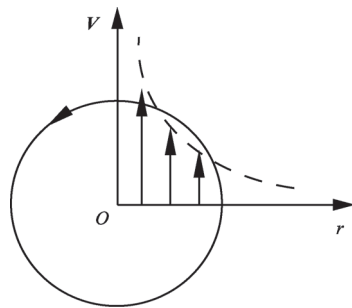


图 2.21 自由涡

$$x^2 + y^2 = \text{常数}$$

它们是以原点为中心的同心圆,表明每个流体微团的移动都是圆周运动,该圆周运动的速度随距原点距离减小而减小、原点处速度为零。

(2) 旋转运动

由于流动是沿 xy 平面的运动,即 $\omega_x = 0, \omega_y = 0$, 且

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kx}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-ky}{x^2 + y^2} \right) \right] = 0$$

所以此流场是无旋的,即流体微团本身不旋转。因此,该流场称为无旋涡或自由涡。

(3) 膨胀运动

$$S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-ky}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2kxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kx}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2kxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

可见,此流动沿 x 和 y 分别有线形变,但 $\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 即无体形变。

(4) 剪形变运动

对于平面速度场,只有剪形变分量 S_{xy} 和 S_{yx} , 则有

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -k \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

表明此流动含有剪形变运动。

例 9 两种典型求解速度势的方法

设有速度场: $u = x + 2y + z + 5$, $v = 2x + y + z + 3$, $w = x + y + z - 6$ 。证明流场是无旋的,并求其速度势。

解: (1) 证明此流场是无旋的

因为

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 1 - 1 = 0$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 1 - 1 = 0$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

即涡量 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0$, 表明流场是无旋的,因而存在速度势。

(2) 求速度势 ϕ

解法 I, 利用公式: $\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, 0) + \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (u dx + v dy + w dz)$

取如图 2.22 所示的积分路径 $OABM$, 则

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) &= \phi(0, 0, 0) + \left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BM} \right) u dx + v dy + w dz \\ &= \phi(0, 0, 0) + \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} u dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} v dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} w dz \\ &= \phi(0, 0, 0) + \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x \right) + \left(2xy + \frac{1}{2}y^2 + 3y \right) + \left(xz + yz + \frac{1}{2}z^2 - 6z \right)\end{aligned}$$

取 $\phi(0, 0, 0) = 0$, 得

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + xz + yz + 5x + 3y - 6z$$

由所给的速度场知流动是定常的, 所以速度势 ϕ 也与 t 无关。

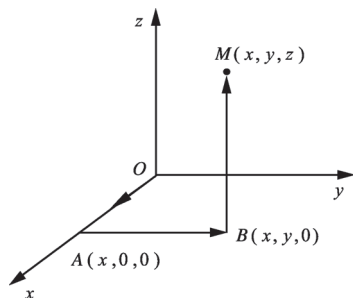


图 2.22 积分路径

解法 II, 解一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x + 2y + z + 5 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x + y + z + 3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x + y + z - 6 \quad (3)$$

由于 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, 这组方程是相容的。由方程 (1) 对 x 积分, 得

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + xz + 5x + f(y, z) \quad (4)$$

式中, $f(x, y)$ 是 y, z 的待定函数。由上式对 y 求偏导数, 并与方程 (2) 比较, 有

$$f' = y + z + 3$$

上式对 y 积分, 有

$$f(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + yz + 3y + g(z)$$

将此结果代回式 (4), 得

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + xz + 5x + \frac{1}{2}y^2 + yz + 3y + g(z) \quad (5)$$

再对 z 求偏导数, 并与方程③比较, 得

$$g'(z) = z - 6$$

上式对 z 积分, 并略去积分常数, 得

$$g(z) = \frac{1}{2}z^2 - 6z$$

代回式⑤, 最后得

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + xz + yz + 5x + 3y - 6z$$

例 10 球坐标系中的无旋运动问题

已知无旋运动的速度势为 $\phi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r}$, Q 是常数。试求: (1) 速度场和流线; (2) 过以原点为中心的任一球面的流量; (3) 判断流体是否可压缩。

解: (1) 速度场和流线

利用球坐标 (r, θ, φ) , 由 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 得速度场为

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \quad v_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0$$

由球坐标流线方程 $\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{v_\varphi}$, 得流线微分方程组为

$$d\theta = 0, \quad d\varphi = 0$$

积分得

$$\theta = C_1, \quad \varphi = C_2$$

它是由原点出发的射线族。当 $Q > 0$ 时, $v_r > 0$, 表明原点是流场的源头; 当 $Q < 0$ 时, $v_r < 0$, 表明原点是流场的汇穴。这种流场称为空间点源流场。

(2) 通过以原点为中心、半径为 r 的任意球面的流量是

$$\oint_{\sigma_r} V_n d\sigma = \oint_{\sigma_r} V_r d\sigma = \oint_{\sigma_r} \frac{Q}{4\pi r^2} d\sigma = Q$$

这里 Q 称为源的强度。

(3) 由于

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

说明流体是不可压缩的。

例 11 利用流函数求平面不可压缩流动问题

已知平面上散运动的流函数为 $\psi = ax^2 - ay^2$ (a 为常数): (1) 证明流场是无旋的; (2) 求流动的速度势 ϕ ; (3) 画出流场的流网图。

解: (1) 根据流函数表达式, 有

$$\begin{aligned}\Omega_z = \nabla^2 \psi &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (ax^2 - ay^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (ax^2 - ay^2) \right] \\ &= (2a - 2a) = 0\end{aligned}$$

表明流动是无旋的, 所以存在速度势 ϕ 。

(2) 利用速度势与速度场的关系以及速度场与流函数的关系, 有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2ay \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ax \quad \text{②}$$

式①对 x 积分, 得

$$\phi = -2axy + f(y) \quad \text{③}$$

式中, $f(y)$ 是 y 的待定函数。由上式对 y 求偏导数, 并与式②比较, 可知 $f'(y) = 0$ 。从而有

$$f(y) = \text{常数}$$

取此常数为零, 代入式③, 得

$$\phi = -2axy$$

(3) 流线族方程为 $\psi = \text{常数}$, 等势线族方程为 $\phi = \text{常数}$, 即

$$x^2 - y^2 = \text{常数}$$

这是一族焦点在坐标轴上、以直线 $y = \pm x$ 为渐近线的等轴双曲线(图 2.23 中实线)。流动方向由速度场确定。当 $a > 0$ 时, 在第一象限, $u < 0, v < 0$; 在第二象限, $u < 0, v > 0$; 在第三象限, $u > 0, v > 0$; 在第四象限, $u > 0, v < 0$ 。流动方向如图 2.23 中箭头所示。

$$xy = \text{常数}$$

这是一族焦点在直线 $y = \pm x$ 上、以坐标轴为渐近线的等轴双曲线(图 2.23 中虚线)。

例 12 极坐标系中的平面不可压缩无旋运动问题

设河水流动是定常且无旋的, 试证明在河道弯曲段(视为圆弧, 图 2.24)河水的流速与半径 r 成反比。

解: 将河水流动视为不可压缩流体的平面流动, 引入流函数, 因河水做无旋流动, 流函数 ψ 满足

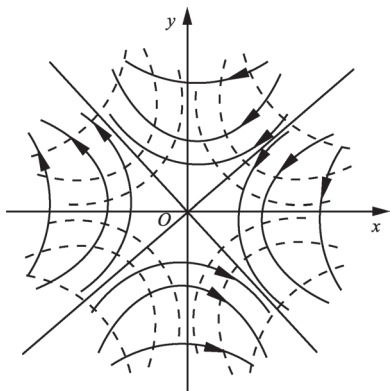


图 2.23 流网图

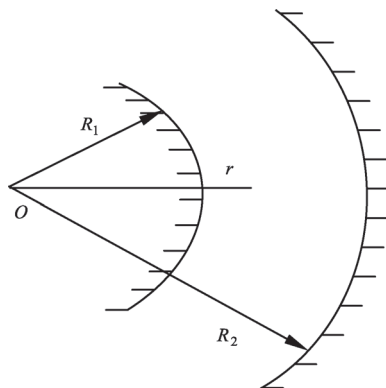


图 2.24 河道弯曲段

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (1)$$

在边界 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 处,河水沿河岸流动,所以沿河岸为流线,设在这两条流线上流函数的值分别为 ψ_{R_1} 和 ψ_{R_2} , 即有边界条件

$$\psi|_{r=R_1} = \psi_{R_1}, \quad \psi|_{r=R_2} = \psi_{R_2} \quad (2)$$

由于河水沿弯道流动,无径向运动,即 $v_r=0$, 从而 $\partial\psi/\partial\theta=r v_r=0$, 再考虑流动是定常的,所以 ψ 仅是 r 的函数。代入极坐标表示的方程式①,得

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = 0 \quad (3)$$

积分后得

$$\psi = C_1 \ln r + C_2 \quad (4)$$

式中, C_1 和 C_2 是积分常数,利用边界条件式②,有

$$C_1 = \frac{\psi_{R_2} - \psi_{R_1}}{\ln(R_2/R_1)}, \quad C_2 = \frac{\psi_{R_1} \ln R_2 - \psi_{R_2} \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

因此

$$\psi = \frac{\psi_{R_2} - \psi_{R_1}}{\ln(R_2/R_1)} \ln r + \frac{\psi_{R_1} \ln R_2 - \psi_{R_2} \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

从而

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\psi_{R_2} - \psi_{R_1}}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r}$$

表明河水的流速与半径 r 成反比,所以弯道内侧的流速大于外侧的流速。

例 13 利用复势理论求流体运动问题

证明均匀流与偶极子的叠加式 $W = U(z + a^2/z)$, 式中, U, a 为实常数,满足 xy

平面上的无环量绕流 $x^2 + y^2 = a^2$ 流动的边界条件: $u|_{z \rightarrow \infty} = U, v|_{z \rightarrow \infty} = 0, v_r|_{r=a} = 0$, 并描绘出零流线特征。

解: 流动的复速度为

$$\frac{dW}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

因此, $dW/dz|_{z \rightarrow \infty} = U$, 从而

$$u|_{z \rightarrow \infty} = U, \quad v|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

流函数为

$$\psi = \text{Im}W = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta$$

从而

$$v_r|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta \Big|_{r=a} = 0$$

令 $\psi=0$, 零流线方程为

$$y = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2$$

这是一条沿 x 轴线并与圆心在原点、半径为 a 的圆周线相连的曲线。

实践题

1. 在拉格朗日表示法中, 流体质点的位置坐标为

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t}, \quad z = c$$

式中, a, b, c 均为常数。求: (1) $t = 0$ 时流体质点的初始位置; (2) $t = 1$ 时位于 $(e, e^{-1}, 1)$ 及 $(1, 1, 1)$ 的流体质点的初始位置; (3) 初始位置为 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 的流体质点的速度和加速度表达式。

2. 已知速度场为 $\mathbf{V} = x^2 y \mathbf{i} - xy^2 \mathbf{j}$, 求点 $(3, 2)$ 处流体质点的速度和加速度。

3. 已知速度场为

$$u = yzt, \quad v = zxt, \quad w = 0$$

求 $t = 0$ 时点 $(2, 5, 3)$ 处流体质点的加速度。

4. 海面气压向东以 $300 \text{ Pa}/180 \text{ km}$ 的变化率下降。在向东以 10 km/h 行驶的船上测得的气压下降率为 $100 \text{ Pa}/3 \text{ h}$, 风速为零。问船驶经某岛时, 岛上的气压变化率是多少?

5. 在拉格朗日表示法中, 流体质点的位置坐标为

$$x = ae^{t^2/2}, \quad y = b(t+1), \quad z = 0$$

求速度的欧拉表达式。

6. 在欧拉表达式中, 流体运动的速度场为

$$u = x + t, \quad v = y + t, \quad w = 0$$

若令 $t=0$ 时流体质点的位置坐标为 (a, b, c) , 求速度的拉格朗日表达式。

7. 试就下列平面速度场, 求流线族方程, 并画出流线族图示, 式中, k, a, b 均为常数。

$$(1) u = kx, v = ky; \quad (2) u = kx, v = -ky;$$

$$(3) u = -ky, v = kx; \quad (4) u = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2}, v = \frac{bx + ay}{x^2 + y^2}.$$

8. 已知用极坐标表示的平面速度场为

$$v_r = \frac{\cos\theta}{r}, \quad v_\theta = \frac{\sin\theta}{r}$$

求流线族方程并画出图示。

9. 已知平面速度场为

$$u = 1 - y, \quad v = t$$

求 $t=1$ 时过点 $(0, 1)$ 的流线及在点 $(0, 0)$ 的流体质点的迹线, 并画出流线随时间的变化和任意指定的若干流体质点的迹线。

10. 试判断下列速度场中, 哪些满足不可压缩的连续性方程?

$$(1) u = xyz, \quad v = -xyzt^2, \quad w = \frac{1}{2}z^2(xt^2 - yt);$$

$$(2) u = (x + 2y)xt, \quad v = (2x - y)yt, \quad w = 0;$$

$$(3) u = a\sin(xy), \quad v = -a\sin(xy), \quad w = 0 \quad (a \text{ 为常数});$$

$$(4) v_R = -\frac{Q}{2\pi R}, \quad v_\varphi = \frac{k}{a\pi R}, \quad v_z = 0 \quad (Q, k \text{ 为常数});$$

$$(5) u = -A \frac{x}{y}, \quad v = A \ln(xy), \quad w = 0 \quad (A \text{ 为常数}).$$

11. 不可压缩流体做平面定常流动, 已知速度 x 分量为 $u = ax^2 + by$, 式中, a, b 为常数, 设 $y=0$ 时 $v=0$, 求速度的 y 分量 v 。

12. 不可压缩流体做平面定常流动, 已知速度 x 分量和 y 分量分别为

$$u = 5z, \quad v = -3y$$

设在坐标原点速度为零, 求速度的 z 分量。

13. 试从柱坐标系或球坐标系中的连续性方程出发, 导出下列特殊流场的连续性方程: (1) 平面辐射性流动; (2) 空间辐射性流动; (3) 流体质点都在通过某一直线的平面上流动; (4) 流体质点都做垂直于某固定轴的圆周运动, 圆心位于该轴上; (5) 流体质点都在共轴线的圆柱上运动; (6) 流体质点都在共轴并有共同顶点的锥面上运动。

14. 流体在截面不均匀的圆管中流动, 设在同一截面上速度分布是均匀的。求下列两种情况下, 流体通过直径分别为 $d_1=0.4\text{ m}$, $d_2=0.2\text{ m}$ 和 $d_3=0.6\text{ m}$ 的三个截面上的速度: (1) 流体是不可压缩的, 且做定常流动, 通过任一截面的流量 $Q=0.4\text{ m}^3/\text{s}$; (2) 流体做定常流动, 直径为 d_1 的截面处的流量为 $Q=0.4\text{ m}^3/\text{s}$, 密度为 ρ_1 , 其他两个截面处的密度分别为 $\rho_2=0.6\rho_1$ 和 $\rho_3=1.2\rho_1$ 。

15. 求下列平面速度场的散度、涡量、沿 x 轴和 y 轴的相对线膨胀率及沿 xy 平面的剪形变率, 说明流体的压缩性和流动的涡旋性:

$$(1) u=ay, \quad v=0;$$

$$(2) u=-ay, \quad v=ax;$$

$$(3) u=-\frac{ay}{x^2+y^2}, \quad v=\frac{ax}{x^2+y^2}。 \text{式中, } a \text{ 是常数。}$$

16. 求下列平面速度场的形变率张量和旋转角速度矢量, 说明流体的压缩性和流动的涡旋性:

$$(1) u=ax, \quad v=ay, \quad w=axy;$$

$$(2) u=yzt, \quad v=xtz, \quad w=0;$$

$$(3) u=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad v=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad w=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$(4) v_R=\frac{2k(t)\cos\theta}{r^3}, \quad v_\theta=\frac{k(t)\sin\theta}{r^3}。 \text{式中, } a \text{ 是常数, } k(t) \text{ 是 } t \text{ 的函数。}$$

17. 已知平面速度场为 $u=3ax^2-3ay^2$, $v=-6axy$, 式中, a 是常数, 试验证流动是无旋的, 并求速度势及沿从原点到点 $(2,1)$ 任一曲线的速度环量。

18. 设速度场有势, $\mathbf{V}=\nabla\phi$, 证明: $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}\right)$, 即加速度场也有势。

19. 已知平面流场的速度势为 $\phi=\frac{a}{2}(x^2-y^2)$, 式中, a 是常数。求速度场, 验证流体是不可压缩的, 并求流线族的形状。

20. 已知平面速度场为 $u=ax$, $v=-ay$, 式中, a 为常数。验证流体是不可压缩的, 并求流函数及通过从原点到点 $(2,1)$ 任一曲线的流量。

21. 已知平面流场分布为 $u=ay$, $v=ax$, 式中, a 为常数。求速度势、流函数及复势。

22. 已知平面速度场的速度势为 $\phi=\frac{a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, 式中, a 为正的常数。求流函数及复势。

23. 设平面流场的复势为 $W=(a+ib)\ln z$, 式中, a, b 为实常数。试求: (1) 速度场; (2) 速度势和流函数, 并画出流网图示 (当 $a>0, b>0$ 时); (3) 沿包围原点任一封

闭曲线的环流量。

24. 设平面无散势流的复势为 $W = (1+i)\ln(z^2+1) + (2-3i)\ln(z^2+4) + \frac{1}{z}$, 试分析它由哪些基本势流叠加而成, 并求沿圆周 $x^2+y^2=9$ 的速度环量及通过该圆周的流量。

本章小结

流体运动学是从几何观点出发来研究流体的运动, 不涉及作用于流体的力, 中心问题是讨论如何描述和分析流体的运动。

1. 基本概念

(1) 流体运动的两种分析方法(观点): 拉格朗日方法和欧拉方法, 分别着眼于流体质点和物理量场, 对有限体积流体问题, 则分别着眼于流体系统和流场控制体。两种描述方法是等效的, 可相互转换。

(2) 两种分析方法的几何描述: 拉格朗日方法和欧拉方法分别用流体质点的迹线和流场的流线来描述。此外, 脉线和时间线常常用于可视化实际流体的运动。

(3) 流体微团旋转角速度矢量与流场涡量关系: $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ 。

(4) 流体微团变形与速度场关系: 相对体(线)膨胀率 S_{ij} ($i=j$); 剪形变率 S_{ij} ($i \neq j$)。

(5) 速度散度 $\text{div} \mathbf{V}$ 的两种描述: 相对体膨胀率(系统); 相对净流出率(控制体)。

(6) 特殊运动描述: 引入速度势描述无旋运动, 即 $\mathbf{V} = \nabla \phi$; 引入流函数描述平面不可压缩流体运动, 即 $\mathbf{V} = \nabla \times (\phi \mathbf{k})$; 引入复势描述平面不可压缩流体的无旋运动, 即 $W = \phi + i\psi$ 。

2. 基本理论

(1) 随体导数(质点导数, 个别导数): $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)B$ 。

(2) 雷诺输运公式: $\frac{d}{dt} \int_{\tau} \eta \rho d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \eta \rho d\tau + \oint_{cs} \eta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$ 。

(3) 连续性方程

一般形式:

微分形式: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (拉格朗日描述); $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ (欧拉描述);

积分形式: $\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0$ (系统); $\oint_{cs} \eta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \eta \rho d\tau$ (控制体)。

特殊形式:

不可压缩无旋流动: $\nabla^2 \phi = 0$; 平面不可压缩流动: $\nabla^2 \psi = 0$;
 不可压缩管道流动: $V_1 S_1 = V_2 S_2$; 定常管道流动: $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$ 。

(4) 速度分解定理: $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}$ 。

(5) 复势理论

基本关系:

$$\phi(x, y) + i\psi(x, y) = W; \quad \mathbf{V} = \overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)}; \quad \Gamma + iQ = \int_L \frac{dW}{dz} dz。$$

几种基本流动的复势:

① 均匀流动: $W = Az$;

② 点源(汇): $W = \frac{Q}{2\pi} \ln z$;

③ 点涡: $W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$;

④ 偶极子: $W = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}$;

⑤ 拐角绕流: $W = az^n$ (a 为常数, $n \geq 1/2$)。

3. 基本方法

(1) 利用已知速度分布 $\mathbf{V}(q_1, q_2, q_3)$, 求形变率 S_{ij} 、流函数 ψ 、速度势 ϕ 、涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 、环量 Γ 、流线方程和迹线方程等物理量场。利用拉梅系数公式, 可以写出正交坐标系中所有物理量场的表达式。

(2) 连续性方程应用: 例如, 利用已知速度分量求另一速度分量; 利用速度场求密度分布。

(3) 随体导数应用: 例如, 求局地变化函数问题。

(4) 复势理论应用: 利用基本流动的复势叠加描述复杂流动问题; 已知复势 $W(z)$, 求速度 \mathbf{V} 、流函数 ψ 、速度势 ϕ 、速度环量 Γ 和流量 Q 。

第 3 章 理想流体动力学基础

流体动力学侧重于研究作用在流体上的力及其与流体运动的关系。本章主要建立理想流体动力学的基本方程,以及它们在解决一些简单的流体力学问题中的应用。本章内容分为四部分:第一,研究作用在流体上的力,着重建立应力的概念;第二,建立积分形式和微分形式的理想流体动力学基本方程,并讨论运动微分方程的首次积分;第三,理想流体动力学基本方程在解决某些简单流动问题中的应用;第四,讨论流体的静力平衡问题。

3.1 流体上作用力

取时刻 t , 流场中任一封闭曲面 σ 包围的体积为 τ 的流体作为研究系统, 见图 3.1, 外界作用在系统上的力可分为质量力和表面力两大类。

3.1.1 质量力

作用在流体系统每一质点上的力称为质量力。例如万有引力、电磁力和惯性力等都是质量力, 对于处在一个微元体内的流体来说, 这类力的大小与其质量 dm 成正比, 也与其体积 $d\tau$ 成正比, 所以这类力又称为体积力。

记 \mathbf{F} 表示单位质量流体所受到的质量力, 它一般为空间坐标 (x, y, z) 和时刻 t 的函数, 则作用在体积为 τ 的流体系统上的总质量力为

$$\int_{\tau} \mathbf{F} \rho d\tau \quad (3.1)$$

式中, ρ 是流体的密度。

如果质量力场是无旋场, 即 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, 则必存在一个标量函数 $U(x, y, z, t)$ 使

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\nabla U \quad (3.2a)$$

即质量力必有势, 反之亦然。函数 $U(x, y, z, t)$ 称为力势函数, 简称力势或位势。如果在直角坐标系中, 质量力表示为 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, 则由式(3.2a)有

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.2b)$$

将质量力仅仅是重力的流体称为重力流体。重力是一种常见的有势质量力, 对于重力流体, 若取直角坐标系的 z 轴竖直向上, 则有 $\mathbf{F} = -g\mathbf{k}$, 取 $z=0$ 处的重力位势为

零,则任意高度 z 处的重力位势为

$$U = \int_0^z g dz$$

如果不考虑重力加速度随高度的变化,则 $U = gz$ 。

3.1.2 表面力

与流体系统接触的周围流体或固体作用在系统表面上的力称为表面力。例如压力和摩擦力等都是表面力。作用在系统表面一个微面元上的表面力,与面元的面积 $d\sigma$ 成正比,所以表面力又称为面积力。

记 \mathbf{n} 表示流体系统表面任一点 M 处面元 $d\sigma$ 的外法向单位矢量, \mathbf{p}_n 表示作用在该点处单位面元上的表面力,并称它为点 M 处以 \mathbf{n} 为法向的面元上的应力矢量(图3.1),则作用在面元 $d\sigma$ 上的表面力为 $\mathbf{p}_n d\sigma$,而作用在流体系统整个表面 σ 上的表面力为

$$\oint_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma \quad (3.3)$$

应力矢量 \mathbf{p}_n 不仅与点 M 的位置有关,而且与受作用面元的法向 \mathbf{n} 有关。注意,这里下标 n 只表示受作用面元的外法线方向,不表示应力的方向。一般地, \mathbf{p}_n 的方向不一定沿法向 \mathbf{n} 。 \mathbf{p}_n 沿面元法向 \mathbf{n} 的分量用 p_m 表示,称为法应力; \mathbf{p}_n 沿面元切向 \mathbf{t} 的分量用 p_m 表示,称为切应力。显然

$$p_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n, \quad p_m = \mathbf{t} \cdot \mathbf{p}_n$$

\mathbf{p}_n 是面元正侧流体对负侧流体作用的应力矢量,则面元负侧流体对正侧流体作用的应力矢量应记为 \mathbf{p}_{-n} 。根据作用和反作用定律,有

$$\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n \quad (3.4)$$

3.2 理想流体动量方程

理想流体的动量方程是物理学中动量定理在流体中的具体表达式,可以根据动量定理的一般形式推导出理想流体积分形式和微分形式的动量方程。

3.2.1 理想流体积分形式动量方程

以任一时刻 t 、任一封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的流体系统为研究对象。设系统内流体的密度为 ρ ,速度为 \mathbf{V} ,它们都是空间位置和时刻 t 的函数,则单位体积流体的动量为 $\rho\mathbf{V}$,从而系统的总动量为

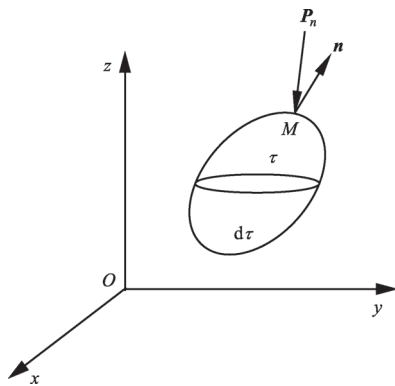


图 3.1 流体系统

$$\mathbf{K} = \int_{\tau} \mathbf{V} \rho d\tau \quad (3.5)$$

根据动量定理:流体系统总动量随时间的变化率,等于作用在该系统上所有外力的矢量和,即 $d\mathbf{K}/dt = \sum \mathbf{F}$ 。由于作用在流体系统上的外力分为质量力和表面力两类,也即

$$\sum \mathbf{F} = \int_{\tau} \mathbf{F} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma \quad (3.6)$$

将式(3.5)和式(3.6)代入动量定理中,得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathbf{V} \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma \quad (3.7)$$

这就是对理想流体系统积分形式的动量方程。注意,流体系统所占区域 τ 及其边界 σ 与时刻 t 有关,一般应分别记为 $\tau(t)$ 和 $\sigma(t)$ 。

利用雷诺输运公式可以推导出着眼于流体控制体积分形式动量方程。为此,取控制体 CV 与某时刻 t 的系统体积 τ 重合,自然控制面 CS 与该时刻的系统表面 σ 重合,利用雷诺输运公式(2.14c),令 $\eta = \mathbf{V}$,则式(3.7)变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau - \oint_{CS} p \mathbf{n} d\sigma \quad (3.8)$$

这就是对控制体的理想流体积分形式动量方程,它表明:控制体内流体动量的变化率加上通过控制面动量的净流出率,等于作用于控制体内流体的质量力与作用于控制面上的表面力的矢量和。

3.2.2 理想流体微分形式动量方程——欧拉方程

在控制体积分形式的动量方程(3.8)中,将左端第一项对时间偏导数与对空间积分的运算顺序交换,得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau = \int_{CV} \frac{\partial(\mathbf{V} \rho)}{\partial t} d\tau = \int_{CV} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

左端第二项利用高斯公式后,可写为

$$\begin{aligned} \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= i \oint_{CS} u \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + j \oint_{CS} v \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + k \oint_{CS} w \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ &= i \int_{CV} [\mathbf{V} \cdot (u \rho \mathbf{V})] d\tau + j \int_{CV} [\mathbf{V} \cdot (v \rho \mathbf{V})] d\tau + k \int_{CV} [\mathbf{V} \cdot (w \rho \mathbf{V})] d\tau \\ &= \int_{CV} [\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V})] d\tau \end{aligned}$$

将以上两式相加,并利用连续性方程,得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \rho d\tau$$

再利用压强梯度的积分关系式 $\oint_{CS} p \mathbf{n} d\sigma = \int_{CV} \nabla p d\tau$, 将以上结果代入式(3.8), 移项并整理, 得

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right] \rho d\tau = 0$$

由于控制体 CV 的取法是任意的, 则有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{或} \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.9)$$

这就是理想流体微分形式的动量方程, 通常又称为欧拉方程。式中, $-\nabla p/\rho$ 称为气压梯度力, 是由于压强分布不均匀而作用在单位质量流体的表面力的合力。式(3.9)表明, 单位质量流体动量的变化率, 等于作用于其上的质量力和气压梯度力的矢量和。

利用矢量分析中的公式 $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$, 令 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{V}$, 有

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

则方程(3.9)第一式又可变成

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.10)$$

上式称为兰勃(Lamb)方程, 其中引入了涡量 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, 在一些问题中, 直接利用此方程会带来方便。

在直角坐标系 (x, y, z) 中, 欧拉方程的分量式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3.11)$$

在柱坐标系 (R, φ, z) 中, 欧拉方程的分量式为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{R} = F_R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_R v_\varphi}{R} = F_\varphi - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3.12)$$

在球坐标系 (r, θ, φ) 中, 欧拉方程的分量式为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} = F_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (3.13)$$

根据流动不同特点选用不同坐标系,可使问题得到简化。

至此,对于理想流体,已经建立了连续性方程(2.18)和欧拉方程(3.9)。如果进一步假定流体是不可压缩的,则连续性方程变成 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$,它和欧拉方程构成微分方程组,在适当的定解条件下,可以求解四个未知量,即三个速度分量 u, v, w 和压强 p 。

3.2.3 转动参考系中欧拉方程

前面是在惯性参考系中推导的动量方程。对地球上的观察者来说,研究小范围内流体的运动,可以把流体看作惯性系。但是,地球既绕太阳公转,又绕自身轴自西向东旋转,平均自转角速度为 $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$,地球公转对地球上流体的运动影响较小,而地球自转却不能不考虑。特别在研究大气和海洋的大尺度运动时,必须把地球看作转动参考系。转动参考系是非惯性系。众所周知,在匀速转动的参考系中,必须引入惯性离心力和科里奥利(Coriolis)力,单位质量物体的动量方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum \mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (3.14)$$

式中, \mathbf{V} 为物体相对于转动参考系的速度, $\sum \mathbf{F}$ 表示各真实力的矢量和, $-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega^2 \mathbf{R}$ 为惯性离心力, $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ 为科里奥利力, $\boldsymbol{\omega}$ 为参考系的转动角速度, \mathbf{r} 和 \mathbf{R} 分别为从原点到物体及从转轴到物体的矢径,见图3.2。

对于匀速转动参考系中的理想流体,真实力包括真实质量力和气压梯度力 $-\nabla p/\rho$,因此,匀速转动参考系中理想流体的欧拉方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (3.15)$$

在自转地球上,真实质量力就是地心引力,它与惯性力的合力就是重力,因此自转地球上理想流体的欧拉方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (3.16)$$

如果以观察者所在处为原点 O_1 ,建立当地直角坐标系,使 O_1x 轴水平向东, O_1y 轴水平向北, O_1z 轴竖直向上指向天顶,由图3.3可知, $\boldsymbol{\omega} = \omega \cos \alpha \mathbf{j} + \omega \sin \alpha \mathbf{k}$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$,则

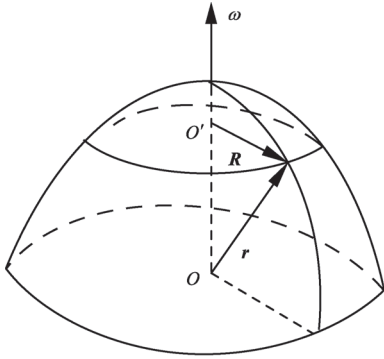


图 3.2 r 和 R

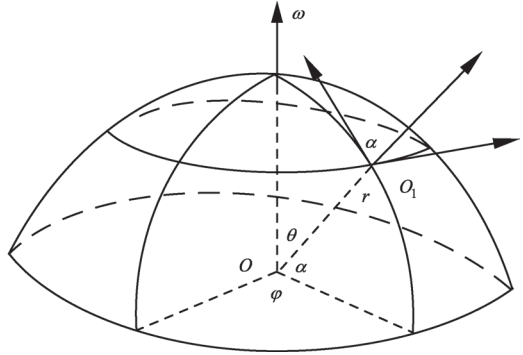


图 3.3 球坐标系和当地直角坐标系

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \cos \alpha & \omega \sin \alpha \\ u & v & w \end{vmatrix} = (\omega w \cos \alpha - \omega v \sin \alpha) \mathbf{i} + \omega u \sin \alpha \mathbf{j} - \omega u \cos \alpha \mathbf{k}$$

从而得方程(3.16)的分量式为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega w \cos \alpha + 2\omega v \sin \alpha \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega u \sin \alpha \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega u \cos \alpha - g \end{cases} \quad (3.17)$$

如果以地球中心 O 为原点建立球坐标系 (φ, α, r) , 这里的 φ 为地理经度, α 为纬度, α 与方程(3.13)中 θ 的关系式为 $\theta + \alpha = \pi/2$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}_r$, 见图 3.3, 此时

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_\varphi & \mathbf{i}_\alpha & \mathbf{i}_r \\ 0 & \omega \cos \alpha & \omega \sin \alpha \\ v_\varphi & v_\alpha & v_r \end{vmatrix} = (\omega v_r \cos \alpha - \omega v_\alpha \sin \alpha) \mathbf{i}_\varphi + \omega v_\varphi \sin \alpha \mathbf{i}_\alpha - \omega v_\varphi \cos \alpha \mathbf{i}_r$$

参考方程(3.13), 注意, 将 $\sin \theta$ 换成 $\cos \alpha$, $\cot \theta$ 换成 $\operatorname{tg} \alpha$, v_θ 换成 $-v_\alpha$, 则得方程(3.17)的分量式为

$$\begin{cases} \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} - \frac{v_\varphi v_\alpha \operatorname{tg} \alpha}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \alpha} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\omega v_r \cos \alpha + 2\omega v_\alpha \sin \alpha \\ \frac{dv_\alpha}{dt} + \frac{v_\alpha v_r}{r} + \frac{v_\varphi^2 \operatorname{tg} \alpha}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - 2\omega v_\varphi \sin \alpha \\ \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2 + v_\alpha^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2\omega v_\varphi \cos \alpha - g \end{cases} \quad (3.18)$$

3.3 理想流体能量方程

流体在运动中,一方面,各部分之间会发生能量交换,这种交换通过做功和传热的方式来实现;另一方面,各种形式的能量之间也会发生相互转换。流体力学中通常考虑的是流体宏观运动的机械能与分子热运动的内能之间的转换。流体的能量方程是物理学中能量转换和守恒定律在流体力学中的数学表达式。下面就根据能量转换和守恒定律来导出理想流体积分形式和微分形式的能量方程。

3.3.1 理想流体积分形式能量方程

在时刻 t ,任取一封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的流体系统。设系统内单位质量流体的内能为 e ,而 $V^2/2$ 是单位质量流体的动能,则系统的总能量为

$$E = \int_{\tau} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau \quad (3.19)$$

根据能量转换和守恒定律,流体系统总能量随时间的变化率,等于外界对系统做功的功率 W 与单位时间内传入系统的能量 Q 之和,即

$$\frac{dE}{dt} = W + Q \quad (3.20)$$

由于作用在流体系统上的外力分为质量力和表面力,而质量力对单位质量流体做功的功率为 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$,在理想流体单位表面积上表面力做功的功率为 $p_n \cdot \mathbf{V} = -p\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}$,因此

$$W = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma \quad (3.21)$$

对流体系统传热的方式有两种,即传导和辐射。设单位时间通过系统单位面积传入的热量为 q_λ ,对于各向同性流体,根据富里埃(Fourier)热传导定律,即 $q_\lambda = k \frac{\partial T}{\partial n}$,式中, $\frac{\partial T}{\partial n}$ 是温度沿表面法线方向的方向导数, k 为热传导系数。再设通过辐射方式系统内单位时间、单位质量流体吸收的热量为 q_R ,则

$$Q = \oint_{\sigma} q_\lambda d\sigma + \int_{\tau} q_R \rho d\tau = \int_{\tau} \left[\frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot (k \nabla T) + q_R \right] \rho d\tau = \int_{\tau} q \rho d\tau \quad (3.22)$$

式中, $q = \frac{\mathbf{V} \cdot (k \nabla T)}{\rho} + q_R$,它是通过传导和辐射两种方式,单位时间内单位质量流体所吸收的热量。将式(3.21)、(3.22)代入式(3.20),得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} q \rho d\tau \quad (3.23)$$

这就是理想流体积分形式的能量方程。

如果取控制体 CV 与某时刻 t 流体系统的体积 τ 重合,并在雷诺输运公式(2.14c)中,令 $\eta = e + V^2/2$,则式(3.23)变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau + \oint_{CS} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ = \int_{CV} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau - \oint_{CS} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{CV} q \rho d\tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

这就是控制体理想流体积分形式的能量方程,它表明控制体内流体能量的变化率加上通过控制面能量的净流出率,等于质量力对控制体内流体做功的功率、控制面上表面力做功的功率以及单位时间控制体内流体所吸收的热量,三者的代数和。

3.3.2 理想流体微分形式能量方程

类似于动量方程从积分形式到微分形式的推导,将方程(3.24)左边第一项中对时间偏导数与对空间区域积分的运算顺序交换,有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho \right] d\tau = \int_{CV} \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau$$

利用高斯公式将方程(3.24)左边第二项和右边第二项变成体积分,即

$$\oint_{CS} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \left[\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\tau$$

及

$$\oint_{CS} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma = \int_{CV} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) d\tau$$

将以上结果代入方程(3.24),移项、整理并利用连续性方程,得

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(e + \frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) - q \right] d\tau = 0$$

由于控制体 CV 的取法是任意的,因而有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + q \quad (3.25a)$$

或

$$\frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + q \quad (3.25b)$$

这就是理想流体微分形式的能量方程,式中, $-\nabla \cdot (p \mathbf{V})/\rho$ 是表面力对单位质量理想流体做功的功率。式(3.25b)表明,单位质量流体能量的变化率,等于质量力和表面力对其做功的功率与单位时间单位质量流体所吸收的热量,三者的代数和。

3.3.3 理想流体动能方程

前面的能量方程是根据能量转换和守恒定律导出的,它与动量方程是彼此独立的。在一般力学中,可以由动量定律导出动能定律,类似地,也可以由理想流体的动

量方程导出动能方程。为此,将速度矢量 \mathbf{V} 点乘欧拉方程(3.9)的两端,得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{V} \quad (3.26)$$

利用矢量微分关系式 $\nabla p \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (p\mathbf{V}) - p\nabla \cdot \mathbf{V}$, 并代入式(3.26), 得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.27)$$

这就是理想流体微分形式的动能方程, 式中, $p\nabla \cdot \mathbf{V}/\rho$ 是流体体积变化时单位质量流体内部压力做功的功率。式(3.27)表明, 单位质量流体动能的变化率, 等于质量力和表面力对其做功的功率与流体体积变化时单位质量流体内压力做功的功率, 三者的代数和。

如果将式(3.25b)减去式(3.27), 则内能方程为

$$\frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} = q \quad (3.28)$$

上式表明, 单位质量理想流体内能的变化率加上其体积膨胀时内部压力做功的功率, 等于单位时间内它吸收的热量, 这正是单位质量理想流体热力学第一定律的数学表达式。如果不考虑流体的吸热, 即在绝热条件下 ($q = 0$), 当流体膨胀时内压力做正功, 流体的内能就要减少, 而由方程(3.27), 流体的动能增加。说明通过流体膨胀时内压力做正功, 流体的内能转换为动能; 反之, 通过流体膨胀时内压力做负功, 流体的动能转换为内能。对于不可压缩理想流体, 因为 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 内压力不做功, 其动能方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{V}) \quad (3.29)$$

上式表明, 不可压缩理想流体的动能变化, 只是由于质量力和表面力做功引起的, 与内能无转换。

如果质量力有势 $\mathbf{F} = -\nabla U$, 且力势场 U 定常, 即 $\partial U/\partial t = 0$, 则 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = -\nabla U \cdot \mathbf{V} = -dU/dt$, 代入式(3.29), 得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + U\right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{V} \quad (3.30)$$

表明单位质量理想流体机械能的变化率, 等于气压梯度力做功的功率。如果流体的压力分布是均匀的, 即 $\nabla p = 0$, 则有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + U\right) = 0 \quad (3.31)$$

表明单位质量流体质点的机械能保持不变。

由微分形式的动能方程容易得出积分形式的动能方程。为此, 将方程(3.27) 两端乘以流体微元的质量 $\rho d\tau$, 并在体积 τ 上积分, 注意, $\int_{\tau} \nabla \cdot (p\mathbf{V}) d\tau = \oint_{\sigma} p\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma$, 则得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{V^2}{2} \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (3.32)$$

这就是理想流体积分形式的动能方程,它表明系统动能的变化率,等于质量力和表面力对系统做功的功率与流体体积变化时系统内部压力做功的功率,三者的代数和。

如果质量力有势且力势场定常,则方程(3.32)变成

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (3.33)$$

上式左端为系统机械能的变化率。如果再假定流体是不可压缩的,则有

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma \quad (3.34)$$

利用雷诺输运公式,读者容易导出控制体理想流体积分形式的动能方程。

3.4 方程完备性和定解条件

连续性方程、动量方程和能量方程等,都是支配流体运动的普适方程。流体力学的基本问题是在质量力已知的情况下,求解流体运动的速度场、压强场等物理量场。这就要求:支配流体运动的微分方程组是完备方程组,即未知函数的数目等于彼此独立方程的数目;有合适的定解条件,因为只有给出合适的定解条件,才能确定流体运动的具体形式。

3.4.1 方程完备性

由连续性方程(2.18)和欧拉方程(3.9)组成的方程组中,共有四个独立方程。一般情况下,要确定的未知函数有五个,即速度 \mathbf{V} 的三个分量、密度 ρ 和压强 p ,所以这组微分方程组是不完备的,必须补充新的方程。如补充能量方程,则出现两个新的未知函数,即单位质量的流体内能 e 及其吸热率 q 。如果再引入 e 和 q 的表达式,则又将出现其他新的未知函数,如温度 T 等。因此,通常不能给出支配流体一般运动的方程组,只能对流体或流动的性质做一些假定或简化,建立一些特殊情况下的完备方程组。下面分别讨论几种常见情形。

(1) 不可压缩均质流体

对于不可压缩流体,其密度为一常数,即 $\rho = \text{常数}$,此时要确定的未知函数只有四个,即速度的三个分量和压强。因此,对于理想不可压缩均质流体的运动,其完备方程组是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \rho = \text{const} \end{cases} \quad (3.35)$$

如果理想不可压缩均质流体的流动是无旋的,则可引入速度势 ϕ ,连续性方程简化为 $\nabla^2 \phi = 0$ 。此时问题可分为两步求解。第一步,求解拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 的定解问题,得到速度势 ϕ ,并由 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 求速度场,这一步不涉及力,属于运动学问题。第二步,利用欧拉方程,由速度场求压力场,这是动力学问题。

(2) 正压流体

对于可压缩流体,可以寻求流体的速度、密度和温度等状态参量间的关系,这种关系式就是流体的物态方程。正压流体是指密度仅仅是压力的单值函数的流体,即正压流体的物态方程可表示为 $\rho = \rho(p)$ 。例如,对于等温气体和绝热(等熵)气体分别有 $p/\rho = \text{常数}$ 和 $p/\rho^\gamma = \text{常数}$,式中, $\gamma = c_p/c_v$ 为比定压热容与比定容热容之比,因此,等温气体和绝热气体都是正压流体。不可压缩均质流体可以看成是特殊的正压流体。正压流体的流场叫作正压流场。根据物态方程,在正压流场中,密度场完全决定于压力场,压强相等的各点必然是密度相等之点,因此,等密度面必与等压面相重合。

现在,要确定的未知函数有五个,即速度 \mathbf{V} 的三个分量、压强 p 和密度 ρ ,而连续性方程、欧拉方程和物态方程,正好是五个独立的方程。因此,对于理想正压流体的运动,其完备方程组就是

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \rho = \rho(p) \end{cases} \quad (3.36)$$

(3) 斜压流体

密度不仅决定于压强,而且还与温度等其他状态量有关的流体,叫作斜压流体。斜压流体的物态方程一般为 $\rho = \rho(p, T, \dots)$ 。对于完全气体,其物态方程就是克拉伯龙(Clapeyron)方程 $p = \rho RT$,其中 R 是该种气体的气体系数,对于干洁空气 $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。斜压流体的流场称为斜压流场。由于在斜压流场中,密度场不仅决定于压强场,而且还与温度场等其他物理量场有关,压强相等的各点密度未必相等,因此,等密度面、等压面和等温面彼此相交。

若在连续性方程和欧拉方程的基础上,补充物态方程,又将引入新的未知函数 T ,如再补充能量方程(3.25b),还将引入新的未知函数 e 和 q 。如果寻求 e 和 q 的一般表达式,将会引入更多的未知函数。因此,必须做一些假定或简化,才能得到相应的完备方程组。

例如,对于完全气体, $e = c_v T$, 如果再假定流动过程是绝热的, 即 $q = 0$, 则完备方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ p = \rho R T \\ \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + q \\ q = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

如果完全气体在流动过程中的吸热只是由于热传导所致, 即不考虑辐射, 则有 $q = \nabla \cdot (k \nabla T) / \rho$, 其中, 热传导系数 k 是已知的。因此, 斜压流体的完备方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ p = \rho R T \\ \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + q \\ q = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T) \end{cases} \quad (3.38)$$

上述方程组中有七个独立方程, 要确定的未知函数正好是七个, 即速度 \mathbf{V} 的三个分量、压强 p 和密度 ρ 、温度 T 和由于热传导所引起的单位质量流体的吸热率 q 。

3.4.2 定解条件

流体运动的完备方程组中, 主要是偏微分方程, 其一般积分都含有若干任意函数, 只有给出一定的附加条件, 才能把这些函数确定下来, 从而描述具体的流体运动, 这些附加条件就称为定解条件。定解条件分为两类, 它们是初始条件和边界条件。

(1) 初始条件

初始条件指初始时刻 $t = t_0$ 时完备方程组中未知函数在流场空间各点处的值, 它表明该时刻流场各点处流体的性质和流体状态。如果未知函数是速度 \mathbf{V} 、压强 p 和密度 ρ , 则初始条件可表示为

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0) = f_1(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}, t_0) = f_2(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}, t_0) = f_3(\mathbf{r}) \quad (3.39)$$

以上各式右端均是空间位置的已知函数。如果完备方程组中的未知函数还有温度 T 等其他一些物理量, 相应地还应该有一些量的初始条件。由于在完备微分方程组中只含有未知物理量对时刻 t 的一阶偏导数, 初始条件只给出这些量的初始值就够了。

此外,在定常流动中,流场各点处的速度、压强和密度等物理量均不随时间变化,所以不需要初始条件。只有在非定常流动中才需要初始条件。

(2) 边界条件

边界条件就是完备方程组中未知物理量在流场边界上满足的条件。它的形式是多种多样的,需要对具体问题做具体分析。几种常见的情形如下。

① 无穷远处边界条件

研究物体在广阔的流体中运动,例如,飞机在高空中飞行可以认为流体是无边界的,其外边界在无穷远处,需给出无穷远处的边界条件,这种边界条件可以写为

$$\mathbf{V}|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{V}_\infty, \quad p|_{r \rightarrow \infty} = p_\infty, \quad \rho|_{r \rightarrow \infty} = \rho_\infty \quad (3.40)$$

以上各式右端均为已知值。

② 分界面上运动学边界条件

流场的边界可以是流体与流体的接触面,也可以是流体与固体的接触面,总之是两种介质的接触面,统称为分界面。所谓运动学边界条件就是分界面上速度应满足的条件。假定分界面两边的物质不在界面上发生蒸发、凝结、渗透和相互溶解,则此种分界面就是物质面,即在运动过程中,分界面始终由同一批质点所组成,它们满足不分离的连续性条件。因此,在界面处两介质的法向速度应相等,即

$$(\mathbf{V}_n)_{\text{介质1}} = (\mathbf{V}_n)_{\text{介质2}} \quad (3.41)$$

由于是理想流体,对于界面处两介质的切向速度没有约束,即两者可以不相等。

如果分界面是一个运动着的空间曲面 S ,其在直角坐标系中的方程为

$$F(x, y, z, t) = 0, (x, y, z) \in S \quad (3.42)$$

由于 S 是一个物质面,两介质在分界面上的法向速度应等于该曲面沿法向的移动速度,即

$$(\mathbf{V}_n)_{\text{介质}i} = \mathbf{V}_{\text{介质}i} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_{\text{介质}i} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (i = 1, 2) \quad (3.43)$$

另一方面,考虑时刻 t 在界面 S 上任一点 (x, y, z) ,在时刻 $t + dt$,它的坐标为 $(x + dx, y + dy, z + dz)$,但仍在界面上,且满足

$$F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0$$

将上式左端做泰勒级数展开,略去高阶项并利用式(3.42),得

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0 \quad \text{或} \quad \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

从而

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = - \frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.44)$$

比较式(3.43)和(3.44),得

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{介质}i} \cdot \nabla F = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.45)$$

这就是分界面上运动学边界条件的一般数学表达式。

最常见的分界面是固壁和自由面,前者是流体与固体的接触面,后者是液体与大气或真空的接触面。根据前面的一般讨论,在固壁处有

$$(\mathbf{V}_n)_{\text{流体}} = (\mathbf{V}_n)_{\text{固体}} \quad \text{或} \quad (\mathbf{V}_n)_{\text{流体}} = 0 \quad (\text{固壁静止时}) \quad (3.46)$$

如果给出固壁方程(3.42),则在固壁处有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V})_{\text{流体}} \cdot \nabla F = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.47)$$

同理,在液体和自由面处有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{流体}} \cdot \nabla F = 0 \quad (3.48)$$

式中, $F(x, y, z, t) = 0$ 为自由面方程。

③分界面上动力学边界条件

分界面上动力学边界条件就是分界面上应力应满足的条件,对于理想流体来说,则是压强应满足的条件。为此,在分界面上任取一面元 dS ,并作一高为 dh 的扁形微元体,其两底面与面元 dS 平行,高度 dh 远小于面元 dS 的线度,如图 3.4 所示。在微元体上、下两底面上所受到的表面力分别为

$$(\mathbf{p}_n)_{\text{介质}2} dS, \quad (\mathbf{p}_{-n})_{\text{介质}1} dS$$

由于高 dh 远小于面元 dS 的线度,侧面积是比面元 dS 更高阶的小量,除了表面张力外,不考虑作用在侧面上的表面力,而表面张力的合力形成附加压强,这就是

$$-\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n dS$$

式中, α 为表面张力系数, R_1, R_2 为两主曲率半径,即任意两个包含 n 的正交平面与界面交线的曲率半径。如果界面是一个球面,则有 $R_1 = R_2 = R$ 。对微元体应用动量定理,注意,质量力和惯性力是更高阶的小量,可不予考虑,从而得

$$(\mathbf{p}_n)_{\text{介质}2} dS + (\mathbf{p}_{-n})_{\text{介质}1} dS - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n dS = 0$$

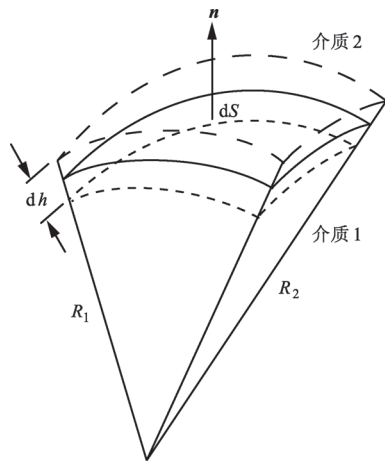


图 3.4 分界面上的微元

$$\text{即} \quad (\boldsymbol{p}_n)_{\text{介质1}} - (\boldsymbol{p}_n)_{\text{介质2}} + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \boldsymbol{n} = 0 \quad (3.49)$$

这就是对于流体的动力学边界条件。对于理想流体 $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$, 则有

$$(p)_{\text{介质2}} - (p)_{\text{介质1}} + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (3.50)$$

如果表面张力系数很小, 或者界面比较平坦, 曲率半径很大, 则不考虑表面张力所引起的附加压强, 有

$$(p)_{\text{介质1}} = (p)_{\text{介质2}} \quad (3.51)$$

即界面两侧的压强相等。对于自由面或真空的接触面, 流体的动力学边界条件分别为

$$(p)_{\text{流体}} = p_a \quad \text{和} \quad (p)_{\text{流体}} = 0 \quad (3.52)$$

式中, p_a 为自由面的大气压强。

如果完备方程组中还有温度等其他未知物理量, 则还应给出这些量的边界条件。温度的边界条件称为热力学边界条件。它们的边界条件视具体问题而定。

3.5 不可压缩理想流体一维流动

在物理上, 给出了合适的定解条件, 遵从物理学普遍定律的运动是唯一确定的。但在数学上, 有了完备方程组和适当的定解条件, 由于方程的非线性等复杂因素, 对大多流体力学问题的求解仍然是相当困难的, 甚至不能回答像解的存在性、唯一性和稳定性等一些基本问题。所以只能对某些简单问题给出解析解。

不可压缩流体的一维流动是一种最简单的运动。首先, 由于流体是不可压缩的, 组成完备方程组的只有连续性方程和欧拉方程。其次, 由于流动是一维的, 只有沿某一坐标轴方向的流速分量不为零, 且未知物理量只与该坐标和时刻 t 有关。如果记空间坐标为 (q_1, q_2, q_3) , 则对于沿 q_1 的一维流动, 有

$$v_2 = v_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_3} = 0 \quad (3.53)$$

在这种情况下, 连续性方程和欧拉方程又可以进一步简化, 特别是欧拉方程的非线性项自行消失, 偏微分方程容易化为常微分方程, 易于求解。

例如, 对于不可压缩理想流体沿 x 轴的一维流动, $v = w = 0, \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, 未知函数是 $u = u(x, t), p = p(x, t)$, 完备方程组是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

将第一式代入第二式, 则非线性项 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 自行消失, 最后方程组化简为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.54)$$

由第一式可知, u 仅仅是 t 的函数, $u = u(t)$, 即同一时刻, 流场各点速度相等, 但压强场可以是非均匀场, 即 $p = p(x, t)$ 。至于定解条件的给出, 需视具体问题而定。

3.6 特殊情形下欧拉方程积分

上一节指出, 支配流体运动的微分方程组是非线性的偏微分方程组, 一般情况下求其定解问题是相当困难的, 只能求解一些极其简单的问题。即便对于简单问题, 直接利用微分方程组求解仍然比较烦琐。本节将在某些特殊情形下, 先求得欧拉方程的首次积分, 以替代方程组中的欧拉方程, 使方程组的求解得到简化。

3.6.1 伯努利积分

首先来研究理想正压流体在有势质量力的作用下, 欧拉方程沿流线的积分问题。

对于理想流体, 其动量方程为欧拉方程, 并可化为兰勃方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.55)$$

式中, $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ 。由于流体是正压的, 密度只是压强的单值函数 $\rho = \rho(p)$, 此时不定积分

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (3.56)$$

也只是压强的单值函数, 称为正压函数。例如对于不可压缩均值流体, 有 $P = p/\rho$; 对于等温完全气体 $1/\rho = RT/p$, 有 $P = RT \ln p$; 对于绝热完全气体 $\rho = cp^{1/\gamma}$, 有 $P = \gamma p / [(\gamma - 1)\rho]$ 。为阐明正压函数 P 的意义, 考察其梯度 ∇P , 注意, P 是压强 p 的函数, 并利用式(3.56), 有

$$-\nabla P = -P'(p) \nabla p = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.57)$$

上式表明, 在正压流场中, 气压梯度力有势, 正压函数就是气压梯度力的势函数。对于有势质量力, 有

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (3.58)$$

因此, 将式(3.57)和(3.58)代入式(3.55), 得

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$$

以流线微元 d, \mathbf{r} 点乘上式各项, 得

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d, \mathbf{r} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) \cdot d, \mathbf{r} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} \cdot d, \mathbf{r} = 0 \quad (3.59)$$

注意, $d_s \mathbf{r}$ 是流线上点的矢径的微分, 如图 3.5 所示, 沿流线的切线方向, 即 $d_s \mathbf{r} \parallel \mathbf{V}$, 因此, $(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d_s \mathbf{r} = 0$; 又 $\mathbf{V} \cdot \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) \cdot d_s \mathbf{r} = d_s \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right)$ 以及 $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d_s \mathbf{r} = \frac{\partial V}{\partial t} ds$, 式中, d_s 表示沿流线的全微分, ds 为流线弧长的微分, 将式 (3.59) 沿流线从 M_0 点到 M 点积分, 得

$$\int_{M_0}^M \frac{\partial V}{\partial t} ds + \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right)_M = \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right)_{M_0} \quad (3.60a)$$

或
$$\int_{M_0}^M \frac{\partial V}{\partial t} ds + \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right)_M = C_s(t) \quad (3.60b)$$

式中, $C_s(t)$ 是与时刻 t 和流线 s 有关的常数。式 (3.60) 就是理想正压流体在有势质量力作用下做非定常流动时, 欧拉方程沿流线的积分, 称为伯努利积分 (也称伯努利方程)。

如果流动是定常的, 则 $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$, 从而伯努利积分为

$$\frac{V^2}{2} + U + P = C_s \quad (3.61)$$

式中, C_s 是与流线有关的常数, 即对于指定的流线是一个常数, 对于不同的流线有不同的值。注意, $V^2/2$ 是单位质量流体的动能, U 是单位质量流体的质量力势能, 而正压函数 P 可称为单位质量流体的压力能。因此, 式 (3.61) 表明, 理想正压流体在有势质量力作用下的定常流动, 沿同一条流线, 单位质量流体的动能、质量力势能和压力能之和是一个恒量。

对不可压缩理想重力流体的定常流动, 由于 $U = gz$, $P = p/\rho$, 则伯努利积分为

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C_s \quad (3.62)$$

如果重力可以忽略, 或者研究的是水平运动, 式 (3.62) 简化为

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_s \quad (3.63)$$

上式给出了速度和压强之间的关系, 表明流速大的地方压强小, 流速小的地方压强大。将式 (3.62) 应用于同一流线上的两点 M 和 M_0 , 有

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho g z_0$$

式中, $\rho V^2/2$ 具有压强的量纲, 称为动压。上式又可写成

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z) + \left(\frac{1}{2} \rho V_0^2 - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \quad (3.64)$$

式中, $\rho g (z_0 - z)$ 相当于静止流体中的压强分布, 而 $\rho V_0^2/2 - \rho V^2/2$ 是流线上任一点 M

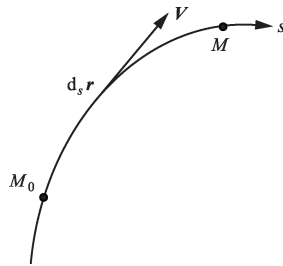


图 3.5 流线微元

和参考点 M_0 的动压差。上式表明, 流体运动时, 流场任一点处的压强差 $p - p_0$ 为静止流体中的压强分布与动压差之和。

3.6.2 拉格朗日积分

现在来研究理想正压流体做无旋运动时, 欧拉方程对空间的积分。

由于是正压流体且做无旋运动, 则有 $-\nabla p/\rho = -\nabla P$ 和 $\mathbf{V} = \nabla\phi$, 兰勃方程(3.10) 简化为

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + P \right) = \mathbf{F}$$

上式表明, 理想正压流体做无旋运动时, 所受的质量力必为有势力, 即必存在势函数 U 使 $\mathbf{F} = -\nabla U$, 代入上式并整理, 得

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + P \right) = 0 \quad (3.65)$$

上式表明, 括号内的量对空间坐标的偏导数均等于零, 即括号内的量的空间分布是均匀的。上式对空间积分, 得

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + P \right)_M = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + P \right)_{M_0} \quad (3.66a)$$

或

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + P = C(t) \quad (3.66b)$$

式中, M 和 M_0 是流场中的任意两点, $C(t)$ 是只与 t 有关的常数, 式(3.66) 就是理想正压流体做无旋运动时欧拉方程对空间的积分, 又称为拉格朗日积分。如果流动还是定常的, 则拉格朗日积分为

$$\frac{V^2}{2} + U + P = C \quad (3.67)$$

式中, C 是对全流场都适用的常数。上式表明, 理想正压流体做定常无旋运动时, 单位质量流体的动能、质量力势能和压力能之和是一个恒量。特别地, 对于不可压缩理想重力流体做定常无旋运动, 拉格朗日积分为

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C \quad (3.68)$$

3.7 圆柱绕流

物体在静止流体中运动受到流体的作用是自然界最普遍的现象。例如, 飞机在空气中的飞行、潜艇在海洋中航行过程中受到的作用等。根据运动的相对性, 这类问题可以看作是流体绕过固定物体的流动问题, 称为绕流问题。圆柱绕流是最简单、最

基本的一种绕流问题。在充满整个空间的不可压缩理想流体中,假定无限长圆柱体沿与轴线垂直的方向上做匀速直线运动,相对于圆柱体,则是无穷远处不可压缩均匀来流绕圆柱体做无旋定常运动。显然,在垂直于圆柱的各平面上,流动情况均相同,这是一种平面无散势流。因此,可以先求流动的复势,从而求得速度场,然后再求压强场和流体对圆柱体的作用。本节将讨论无环量的圆柱绕流和有环量的圆柱绕流。

3.7.1 无环量圆柱绕流

设一半径为 a 的无限长圆柱的圆心位于坐标原点,取 Oxy 平面垂直于圆柱体,如图 3.6 所示。无穷远处均匀来流速度 U 沿 x 轴正向,由于圆柱的阻碍,当流体接近圆柱时将绕过圆柱流动,远离圆柱时流速又趋于与 x 轴平行。

(1) 复势、速度场和流线

在 2.6 节中曾经指出,平面无散势流的速度势和流函数都满足拉普拉斯方程,根据拉普拉斯方程边值问题的唯一性定理,满足给定边界条件的平面无散势流的复势是唯一的。因此,一个复函数 $W = f(z)$ 是否为某平面无散势流的复势,只需检验它是否满足流动的边界条件。分析表明,对于沿 x 轴正向的无穷远处不可压缩均匀来流做无环量的圆柱绕流,均流与偶极子流动的叠加

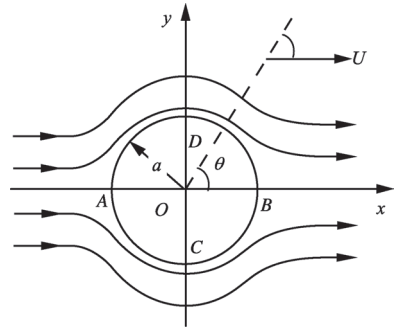


图 3.6 无环量的圆柱绕流

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (3.69)$$

满足流场的边界条件

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = U \quad \text{即} \quad u|_{z \rightarrow \infty} = U, v|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

$$v_r|_{r=a} = \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=a} = 0 \quad \text{或} \quad \psi|_{|z|=a} = \text{Im}W(z)|_{|z|=a} = \text{常数}$$

因此,式(3.69)是无环量圆柱绕流的复势。

该流场用极坐标形式表达较为简单,从式(3.69)容易推导出速度势和流函数

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \quad (3.70)$$

相应的速度场为

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \quad (3.71)$$

在圆柱表面 $r=a$,速度分布为

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = -2U \sin\theta$$

由此可计算在 x 轴与圆柱的交点(图 3.6) A 和 B 上($\theta = \pi$ 和 $\theta = 0$), 速度为 $v_\theta = 0$, 故两点称为驻点; 在上下侧点 D 和 C 上($\theta = \pm \pi/2$), 速度分别为 $v_\theta = -2U$ 和 $2U$, 其速度绝对值等于来流速度的两倍, 是最大速度点。

流线族方程为 $\psi = \text{常数}$, 即

$$U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta = \text{常数} \quad \text{或} \quad U\sqrt{x^2 + y^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) = \text{常数} \quad (3.72)$$

在无穷远处, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, 有 $y = \text{常数}$, 表明该处流线趋于平行于 x 轴。零流线由式(3.70)得

$$U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta = 0$$

即 $r = a$ 和 $\theta = 0, \pi$, 表明零流线是由半径为 a 的圆周与 x 轴的圆外部分所组成。

(2) 压强分布及其对圆柱的作用

对于不可压缩理想重力流体做定常无旋运动, 利用拉格朗日积分(3.66), 取无穷远点和圆柱表面上任意点, 得

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p|_{r=a} + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2|_{r=a} = p|_{r=a} + \frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 4\sin^2\theta$$

$$\text{即} \quad p|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta) \quad (3.73)$$

上式表明, 圆柱表面的压强分布关于 x 和 y 对称, 前后驻点 A 和 B ($\theta = \pi$ 和 $\theta = 0$) 的压强最大 $p|_{r=a, \max} = p_\infty + \rho U^2/2$, 上下侧点 D 和 C ($\theta = \pm \pi/2$) 的压强最小 $p|_{r=a, \min} = p_\infty - 3\rho U^2/2$ 。

引入无量纲压强系数:

$$C_p = (p|_{r=a} - p_\infty) / \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) = 1 - 4\sin^2\theta$$

可以看出, $C_p(\theta) = C_p(\theta + \pi)$, 从而 $p(a, \theta) = p(a, \theta + \pi)$, 即周围流体对圆柱体的压力是平衡的, 表明流体绕圆柱体流动时, 对圆柱体的合力为零。或者说当圆柱体在静止流体中运动时, 不受流体的任何阻力, 显然, 这种理论分析与实际流动相矛盾, 故称为达朗贝尔佯谬, 它是忽略了真实流体黏性的结果。实际上, 流体存在着黏性, 当它绕过圆柱流动时往往会产生流动分离, 在圆柱前后出现压强差, 压强系数分布曲线已不是前后对称的。圆柱体要受到流体作用的合力, 或者说圆柱体在流体中运动时要受到阻力。图 3.7 给出了圆柱面上压强系数分布的理论结果与实验结果的比较。

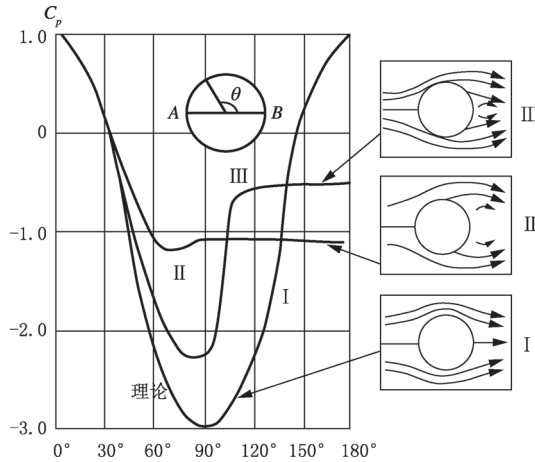


图 3.7 圆柱面压强系数分布

3.7.2 有环量圆柱绕流

在上述无环量圆柱绕流中,若原点再叠加一个强度为 Γ 的顺时针点涡,则可以形成有环量的圆柱绕流平面势流。

(1) 复势、速度场和流线

由均流、偶极子和点涡三个基本流动叠加的复势为

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (3.74)$$

容易验证满足流场的边界条件,即

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} &= U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = U \\ \psi \Big|_{|z|=a} &= \text{Im}W(z) \Big|_{|z|=a} = \left[U\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right]_{r=a} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a \\ \text{Re} \oint_{L_a} \frac{dW}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} &= \Gamma \end{aligned}$$

因此,式(3.74)是有环量圆柱绕流的复势。

从式(3.74)容易推导出速度势和流函数为

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (3.75)$$

利用速度势容易求得极坐标中的速度场为

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (3.76)$$

在圆柱表面 $r=a$, 速度分布为

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

式中, $v_\theta|_{r=a}$ 比无环量的对应速度多一项由环量引起的顺时针方向速度, 使上半圆的速度增大, 下半圆的速度减小, 并使前后驻点下移。前驻点 A 的幅角 θ_σ 称为驻点位置临界角(图 3.8a), 由式 $v_\theta|_{r=a} = 0$ 确定。环量与驻点临界角的关系为

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \theta_\sigma \quad \text{或} \quad \sin \theta_\sigma = -\frac{\Gamma}{4\pi a U}$$

即随着环量的增大, θ_σ 角增大, 至 $\theta_\sigma = 3\pi/2$ 时, A, B 两点重合(图 3.8b), 环量值为 $\Gamma = 4\pi a U$; 当环量继续增大, 即 $\Gamma > 4\pi a U$, 驻点脱离圆柱面进入流场中, 称为自由驻点(图 3.8c)。令 $dW/dz = 0$, 可以得到自由驻点位置 z 满足的方程为

$$U - \frac{Ua^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = 0$$

它表明自由驻点在虚轴(y 轴)上。注意, 圆柱面外的解才有意义, 即取

$$\text{当 } \Gamma > 0 \text{ 时, } z = \left[\frac{\Gamma}{2\pi U} + \left(\left(\frac{\Gamma}{4\pi U} \right)^2 - a^2 \right)^{1/2} \right] i, \text{ 在 } y \text{ 轴正方};$$

$$\text{当 } \Gamma < 0 \text{ 时, } z = - \left[\frac{\Gamma}{4\pi U} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U} \right)^2 - a^2} \right] i, \text{ 在 } y \text{ 轴负方}。$$

$$\text{驻点离原点的距离是 } \left| \frac{\Gamma}{4\pi U} \right| + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U} \right)^2 - a^2} > a。$$

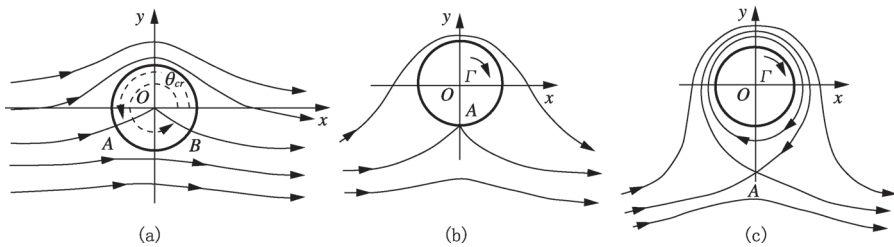


图 3.8 有环量的圆柱绕流

流线族方程为 $\psi = \text{常数}$, 即

$$U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \text{常数}$$

$$\text{或} \quad Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数} \quad (3.77)$$

可以看出,流线关于 y 轴是对称的,但关于 x 轴是不对称的。在无穷远处, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, 有 $u|_{r \rightarrow \infty} = U, v|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 说明无穷远处的流线趋于与 x 轴平行。将式(3.77)中的常数设为零,可求得零流线方程。

(2) 压强场和流体对圆柱的作用

利用拉格朗日积分,并由速度分量式(3.76) 求出 $V^2 = v_r^2 + v_\theta^2$, 可得压强分布

$$\begin{aligned} p &= p_\infty + \frac{\rho}{2}(U^2 - V^2) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \left(\frac{V}{U} \right)^2 \right] \\ &= p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos^2 \theta - \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r U} \right]^2 \right\} \quad (3.78) \end{aligned}$$

在圆柱面上 $r=a$, 有

$$p|_{r=a} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - 4 \left(\sin^2 \theta - \frac{\Gamma \sin \theta}{2\pi a U} + \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2 U^2} \right) \right]$$

上式中后两项是由环量引起的。因此,流体作用于单位长度圆柱上的合力可以用积分表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \oint_{L_a} p|_{r=a} \mathbf{n} dl \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - 4 \left(\sin^2 \theta - \frac{\Gamma \sin \theta}{2\pi a U} + \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2 U^2} \right) \right] \right\} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) a d\theta \\ &= -\rho U \Gamma \mathbf{j} \end{aligned}$$

因此,在 x, y 方向的分量为

$$R_x = 0 \quad \text{和} \quad R_y = -\rho U \Gamma \quad (3.79)$$

而作用力矩是

$$\mathbf{M} = - \oint_{L_a} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) p|_{r=a} dl = 0 \quad (3.80)$$

式(3.79)和(3.80)说明,不可压缩理想流体做有环量的绕圆柱流动时,沿 x 方向压强合力仍为零,但沿 y 方向产生大小为 $\rho U \Gamma$ 的合力,合力矩为零。这里 R_x 和 R_y 就是通常所指的水平阻力和垂直升力。由于升力的存在,将使圆柱体产生横向运动,这种现象称为马格努斯(Magnus)效应。旋转的乒乓球和足球向前运动时都有这种效应。实际上,式(3.80)对有环量的绕任意形状柱体的流动都适用,又称为库塔-茹科夫斯基定理。

3.8 积分形式动量方程和动量矩方程应用

在 3.2 节中,利用动量定理和雷诺输运公式,推导出了控制体积分形式的动量

方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{p}_n d\sigma \quad (3.81a)$$

它表明控制体内流体动量的变化率加上通过控制面动量的净流出率,等于作用于控制体内流体的质量力与作用于控制面上的表面力的矢量和。

类似地,利用动量矩定理 $d\mathbf{L}/dt = \sum \mathbf{M}$ 和雷诺输运公式,可以导出控制体积分形式的动量矩方程(读者可自行推导)为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\tau + \oint_{CS} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \rho d\tau + \oint_{CS} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma \quad (3.82a)$$

它表明控制体内流体动量矩的变化率加上通过控制面动量矩的净流出率,等于作用于控制体内流体的质量力力矩与作用于控制面上的表面力力矩的矢量和。

方程(3.81a)和(3.82a)适用于黏性流体。对于理想流体, $\mathbf{p}_n = -pn$ 。现在应用这两个方程来讨论运动流体对固体的作用力和力矩。为此,取固体壁面 Σ 和流场中空间曲面 S 作为控制面,即 $CS = S \cup \Sigma$,所包围的空间区域为控制体 CV ,如图 3.9 所示。注意,在固壁 Σ 上, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_n = 0$,则方程(3.81a)和(3.82a)分别变成

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \int_S \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau + \int_S \mathbf{p}_n d\sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma \quad (3.81b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\tau + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ & = \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \rho d\tau + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma \end{aligned} \quad (3.82b)$$

式中, $\int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma$ 和 $\int_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma$ 分别是固壁对流体的作用力和力矩。根据作用与反作用定律,流体对固壁的作用力和力矩分别为

$$\mathbf{R} = - \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma \quad \text{和} \quad \mathbf{M} = - \int_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma$$

于是,由式(3.81b)和(3.82b)分别得

$$\mathbf{R} = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \int_S (\mathbf{p}_n - \mathbf{V} \rho V_n) d\sigma \quad (3.83a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \rho d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\tau + \int_S [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) - (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho V_n] d\sigma \quad (3.84a)$$

如果流体是定常的, S 面处的流动可看作无黏流,则有

$$\mathbf{R} = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau - \int_S (pn + \mathbf{V} \rho V_n) d\sigma \quad (3.83b)$$

$$\mathbf{M} = \int_{CV} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \rho d\tau - \int_S [(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) p + (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho V_n] d\sigma \quad (3.84b)$$

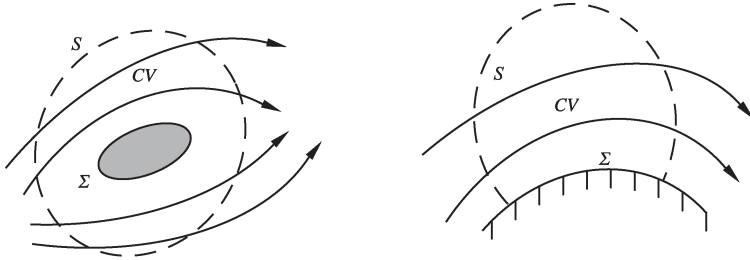


图 3.9 含有固体壁面的控制面

3.9 流体静力平衡

流体相对于参考系处于静止的状态,称为静力平衡状态。流体静力学问题可以作为流体动力学问题的一种特殊情形来处理。本节主要研究静止流体中的压强分布及静止流体对物体的作用力。

3.9.1 静力平衡方程

(1) 流体静力平衡方程

在流体中任取一封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的流体系统。由于流体处于静止状态,所有流体质点的速度和加速度都等于零,则系统所受的质量力和表面力的矢量和等于零,考虑静止流体中应力 $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$,则有

$$\int_{\tau} \mathbf{F} \rho d\tau - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = 0$$

利用高斯公式,将上式左端两项合并为 $\int_{\tau} [\rho \mathbf{F} - \nabla p] d\tau = 0$,其对任意体积 τ 均成立,因而有

$$\rho \mathbf{F} - \nabla p = 0 \quad \text{或} \quad \rho \mathbf{F} = \nabla p \quad (3.85)$$

这就是流体静力平衡方程。在直角坐标系中它的分量式为

$$\rho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho Z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.86)$$

利用欧拉方程(3.9),令 $d\mathbf{V}/dt = 0$,也可得到方程(3.86)。

流体静力学的基本问题是在质量力 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ 已知且满足一定的边界条件下,利用方程(3.86)求压强分布 $p = p(x, y, z)$ 。

(2) 流体静力平衡条件

静力平衡方程(3.85)为矢量方程,有三个分量式,即方程组(3.86)。由于方程个数多于未知函数个数,故不是任意质量力都能使方程组相容。因此,要从方程组(3.86)求出压强场 $p = p(x, y, z)$,质量力必须满足一定的条件,这个条件称为相容条件。

将方程(3.85)两端取旋度,并注意 $\nabla \times \nabla p = 0$,可得

$$\nabla \times (\rho \mathbf{F}) = 0 \quad \text{或} \quad \rho \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \rho \times \mathbf{F} = 0 \quad (3.87)$$

上式两端取与 \mathbf{F} 的点积,考虑到 $\mathbf{F} \cdot (\nabla \rho \times \mathbf{F}) \equiv 0$,从而有

$$\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (3.88)$$

这就是维持流体静力平衡质量力应满足的相容条件。

满足条件式(3.88)的质量力有三种可能:

① $\mathbf{F} = 0$,即流体不受质量力作用,此时由静力平衡方程(3.85)有 $\nabla p = 0$ 或 $d p = \nabla p \cdot d\mathbf{r} = 0$,从而

$$p = \text{常数} \quad (3.89)$$

说明处于静力平衡的流体如果不受质量力作用,则它的压强是均匀分布的。

② $\nabla \times \mathbf{F} = 0$,即质量力有势, $\mathbf{F} = -\nabla U$ 。此时由式(3.89)得

$$-\nabla \rho \times \nabla U = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \rho \times \nabla U = 0 \quad (3.90)$$

表明位势 U 的等值面也就是密度 ρ 的等值面,因而 U 是 ρ 的单值函数 $U = U(\rho)$ 。再由 $d p = -\rho \nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU$,积分得

$$p = -\int \rho dU = -\int \rho U'(\rho) d\rho = p(\rho)$$

表明压强 p 是密度 ρ 的单值函数,或者反过来,密度 ρ 是压强 p 的单值函数 $\rho = \rho(p)$ 。也就是说,如果质量力有势,则只有正压流体才可能保持静力平衡;反过来,读者可以自己证明,如果流体是正压的,则只有当质量力有势时,流体才可能保持静力平衡。

在 $dU = 0$ 面上,有 $d p = 0$,表明在静止流体中,等位势面与等压面重合。例如静止液体的自由面是等压面(该面上各点的压强都等于大气压),也是等位势面,常称为水平面,它必与重力垂直。

③ $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$,但 $\nabla \times \mathbf{F}$ 与 \mathbf{F} 垂直。此时流体是斜压的,下一章将证明,斜压流体不可能保持静止状态。

前面的第一种情况可以看成第二种情况的特例,因为 $\mathbf{F} = 0$ 自然满足 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 。综上分析可知,处于静力平衡的流体必然是正压流体,而且它所受到的质量力必定是有势力。

(3) 静止流体中压强分布

① 正压流体处于静力平衡时的压强分布

前面指出,处于静力平衡的流体必是正压流体,因而存在正压函数 P 使 $dP =$

dp/ρ , 同时质量力必有势 $\mathbf{F} = -\nabla U$, 由 $dp = -dU$, 得

$$d(U + P) = 0 \quad \text{或} \quad U + P = \text{常数} \quad (3.91)$$

根据所讨论正压流体的物态方程 $\rho = \rho(p)$ 求出正压函数 $P(\rho)$ 和由已知质量力求出势函数 $U(x, y, z)$, 代入上式并利用给定的边界条件, 即可得到压强的空间分布。

② 不可压缩流体处于静力平衡时的压强分布

均质不可压缩流体可看作正压流体的特殊情形。由于 $\rho = \text{常数}$, 则正压函数 $P = p/\rho$, 将其代入式(3.91), 得

$$U + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (3.92)$$

设 p_0 和 U_0 分别为空间某点 (x_0, y_0, z_0) 处的压强和质量力位势, 则有

$$U + \frac{p}{\rho} = U_0 + \frac{p_0}{\rho} \quad \text{或} \quad p - p_0 = -\rho(U - U_0) \quad (3.93)$$

对于均质不可压缩重力流体, 忽略重力加速度随高度的变化, 有

$$p = p_0 - \rho g(z - z_0) \quad (3.94)$$

如果 z_0 为自由面的高度, p_0 为自由面上的压强, 令 $h = z_0 - z$ 表示自由面下的深度, 则上式变成

$$p = p_0 + \rho g h \quad (3.95)$$

它表示均质不可压缩静止重力流体在自由面下 h 深处的压强, 等于自由面上的压强与高度为 h 、底面积为单位面积的流体柱重量之和, 这就是著名的流体静力学定律。

③ 大气的静力平衡

大气是非均质流体, 由于重力的作用、地球的旋转和大气不同层次对太阳辐射吸收程度的差异, 使大气的状态参量在垂直方向上呈不均匀分布。对于处于静止状态的大气, 利用静力平衡方程(3.85), 在当地直角坐标系中, 有

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

表明气压 p 只是垂直高度 z 的函数 $p = p(z)$, 且有

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz} = \rho(z)$$

即密度 ρ 也只是 z 的函数。再由物态方程 $p = \rho RT$ 得知 $T = p/(\rho R) = T(z)$, 说明温度 T 也只是 z 的函数, 这里 R 是空气的气体常数, 对干洁空气, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

综上所述, 静止大气的气压、密度和温度等状态参量, 都只是垂直高度 z 的函数。因此, 高度 z 相同的各点, 其状态参量必相同。也就是说, 所有状态的等值面都是水平面, 由此也说明, 静止大气是正压大气。像静止大气那样, 其状态参量按垂直方向分层分布的流体, 叫作分层流体或层结流体。大气的层结, 就是指大气的压强、密度和温度等状态参量在垂直方向的分布。

3.9.2 静止流体中压强传递——帕斯卡原理

1653年,法国科学家帕斯卡研究了当静止流体某点压强发生变化时,其他各点压强如何产生相应的变化问题,得出了静止流体传递压强的规律,称为帕斯卡原理。下面分别就不可压缩流体和正压流体的情形来进行讨论。

(1) 不可压缩流体的帕斯卡原理

设不可压缩静止流体中某点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其他任一点 $M(x, y, z)$ 处的压强分别为 p_0 和 p , 质量力位势分别为 U_0 和 U , 则有

$$p - p_0 = -\rho(U - U_0) \quad (3.96)$$

式中, U_0 和 U 只与位置有关, 对于选定的两点 M_0 和 M , 它们是不变的。由上式可知, 当点 M_0 处的压强变化 δp_0 时, 要使流体保持静力学平衡, M 点处的压强必然及时地做相应的变化 δp , 变化后两点处的压强分别为 $p_0 + \delta p_0$ 和 $p + \delta p$, 同样利用上述公式, 有

$$(p + \delta p) - (p_0 + \delta p_0) = -\rho(U - U_0)$$

与式(3.96)相减, 得

$$\delta p - \delta p_0 = 0 \quad \text{或} \quad \delta p = \delta p_0 \quad (3.97)$$

表明当不可压缩静止流体内某点处的压强发生变化时, 必然及时地引起其他各点处的压强产生相同的变化。这就是不可压缩流体的帕斯卡原理。帕斯卡原理有很多实际应用, 水压机就是这一原理的典型应用例子。

(2) 正压流体的帕斯卡原理

同样, 设正压静止流体中点 M_0 和 M 处的压强分别为 p_0 和 p , 质量力位势分别为 U_0 和 U , 由于流体是正压的 $\rho = \rho(p)$, 则有 $d\rho/\rho(p) = -dU$, 积分得

$$\int_{p_0}^p \frac{d\rho}{\rho(p)} = -(U - U_0) \quad (3.98)$$

注意, 对于选定的两点 M_0 和 M , U_0 和 U 是不变的。设当点 M_0 处的压强发生 δp_0 变化时, M 点处的压强发生相应的变化 δp , 则有

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} \frac{d\rho}{\rho(p)} = -(U - U_0)$$

与式(3.98)相减, 得

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p_0} \frac{d\rho}{\rho} + \int_p^{p + \delta p} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad \text{或} \quad \int_p^{p + \delta p} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{p_0}^{p_0 + \delta p_0} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.99)$$

这就是正压流体的帕斯卡原理。如果知道某点处的压强变化 δp_0 , 可以利用这个公式来求得其他点处的压强变化 δp 。

如果 δp_0 和 δp 为无限小量, 则 M_0 和 M 两点处的密度可以认为没有变化, 并分别为 $\rho_0 = \rho(p_0)$ 和 $\rho = \rho(p)$, 则式(3.99)变成

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta p_0}{\rho_0} \quad (3.100)$$

它表明正压静止流体中,无限小的压强变化与相应点处的流体密度成正比。

3.9.3 静止流体对物体作用力

已知静止流体中的压强分布,可以求解静止流体对物体的作用力。由于物体表面各部分受到流体压力的大小和方向不一定相同,因此,求静止流体对浸没在其中的物体的总的的作用力问题,实际上是求空间力系的合成问题。一般情况下,一个空间力系应合成一个力和一个力偶矩。下面讨论两种特殊情形。

(1) 平面壁上的总压力

求静止流体作用在面积 σ 的平面壁上的总压力。由于作用在平面壁 σ 各面元上的压力都垂直于该平面壁,因此,这些压力构成一组同向平行力,它们可以合成一个力,合力的大小等于作用在各面元上压力的代数和,合力的方向垂直于该平面壁并指向面壁内部,合力的作用点为作用在各面元上的压力所构成的平行力系的力心,称为压力中心。所以,作用在平面壁上的总压力是

$$\mathbf{R} = \int_{\sigma} (-pn) d\sigma = -\mathbf{n} \int_{\sigma} p d\sigma \quad (3.101)$$

式中, \mathbf{n} 为面壁的外法线方向单位矢量,指向流体内部。 \mathbf{R} 的作用点即压力中心 C 的坐标是

$$x_c = \frac{\int_{\sigma} x p d\sigma}{R}, \quad y_c = \frac{\int_{\sigma} y p d\sigma}{R}, \quad z_c = \frac{\int_{\sigma} z p d\sigma}{R} \quad (3.102)$$

对于不可压缩重力流体,取 Oxy 平面在自由面上, Oz 轴竖直向上,利用式(3.98),则

$$R = \int_{\sigma} (p_0 - \rho g z) d\sigma = p_0 \sigma - \rho g \int_{\sigma} z d\sigma = (p_0 - \rho g z_c) \sigma$$

式中, $z_c = \int_{\sigma} z d\sigma / \sigma$ 是平面壁 σ 的几何中心坐标,记 $h_c = -z_c$ 是平面壁的几何中心 C 在自由面下的深度,则有

$$R = (p_0 + \rho g h_c) \sigma \quad (3.103)$$

上式表明,静止不可压缩重力流体作用于平面壁上的总压力,等于该平面壁几何中心处的压强与平面壁面积的乘积。

(2) 浸设在重力流体中物体受到的浮力——阿基米德原理

当体积为 τ 的任意形状物体浸设在重力流体中时,物体表面 σ 上各面元都受到流体的压力,根据刚体力学知识,所有压力的总效果归结为一个作用力和一个力偶矩。设 \mathbf{n} 为物体表面元 $d\sigma$ 的外法线单位矢量,利用静力平衡方程(3.85),即 $\nabla p = \rho \mathbf{F}$,这里 $\mathbf{F} = -g\mathbf{k}$,则作用力可表示为

$$\mathbf{R} = -\oint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = -\int_{\tau} \nabla p d\sigma = \int_{\tau} \rho g \mathbf{k} d\tau = mg \mathbf{k} \quad (3.104)$$

式中, $m = \int_{\tau} \rho d\tau$ 是物体排开流体的质量。设 \mathbf{r} 是面元 $d\sigma$ 的矢径, 则力偶矩可表示为

$$\mathbf{M} = -\oint_{\sigma} \mathbf{r} \times (p \mathbf{n}) d\sigma = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \times (p \mathbf{r}) d\sigma = \int_{\tau} \nabla \times (p \mathbf{r}) d\tau$$

利用相关矢量微分运算公式, 并注意 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, 有 $\nabla \times (p \mathbf{r}) = \nabla p \times \mathbf{r}$, 从而

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\tau} \nabla p \times \mathbf{r} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \times \mathbf{r} d\tau = \int_{\tau} \mathbf{r} \times \rho g \mathbf{k} d\tau = \left(\int_{\tau} \mathbf{r} \rho d\tau \right) \times g \mathbf{k} \\ &= \frac{\int_{\tau} \mathbf{r} \rho d\tau}{\int_{\tau} \rho d\tau} \times g \mathbf{k} \int_{\tau} \rho d\tau \\ &= \mathbf{r}_c \times \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.105)$$

式中, $\mathbf{r}_c = \int_{\tau} \mathbf{r} \rho d\tau / \int_{\tau} \rho d\tau$ 是物体排开流体体积的质心位置矢量, 如果流体是均质不可压缩的, 则质心就是体积的几何中心。式(3.104)和(3.105)说明, 浸没在重力流体中物体表面各面元上所受到的流体压力可以合成一个力, 这个力的大小等于物体所排开的流体重量 mg , 方向竖直向上, 并作用在所排开流体的质心上, 这个力称为浮力。这就是著名的阿基米德原理。上述结论也适用于物体部分浸没在流体中的情形。

应用例

例1 理想流体和静止流体中应力分析

证明理想流体和静止流体中只有法应力, 且同一点处沿各方向的法应力都相等, 其大小与作用面的方位无关。

证明: 理想流体忽略了流体的黏性, 对于切向形变没有任何抗拒能力, 而静止流体也不能承受任何切向力, 因此, 在理想流体和静止流体中, 切应力都等于零。也就是说, 在理想流体和静止流体中只有法应力。

取以点 M 为顶点的小四面体 $MABC$, 见图 3.10, 其三个侧面分别平行于各坐标面, 设底面 ABC 的面积为 $\Delta\sigma$,

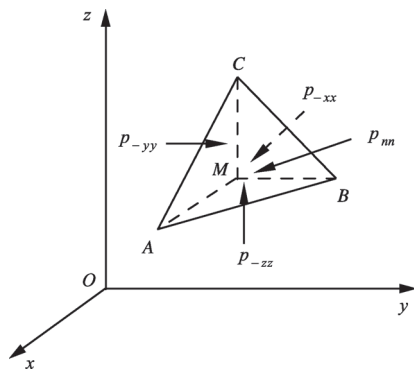


图 3.10 小四面体上的法应力

法向为 \mathbf{n} , 则三个侧面的面积分别为

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma\cos(n, x) = n_x\Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma_y = \Delta\sigma\cos(n, y) = n_y\Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma\cos(n, z) = n_z\Delta\sigma$$

再设 h 为小四面体的高, 则小四面体的体积为 $\Delta\tau = h\Delta\sigma/3$ 。对该小四面体应用动量定理, 有

$$\mathbf{F}\rho\Delta\tau + p_m\Delta\sigma\mathbf{n} + p_{-xx}\Delta\sigma_x\mathbf{i} + p_{-yy}\Delta\sigma_y\mathbf{j} + p_{-zz}\Delta\sigma_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}\rho\Delta\tau$$

代入小四面体侧面面积和体积公式, 并利用式(3.4), 有

$$\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)\rho\frac{1}{2}h\Delta\sigma + (p_m\mathbf{n} - n_x p_{xx}\mathbf{i} - n_y p_{yy}\mathbf{j} - n_z p_{zz}\mathbf{k})\Delta\sigma = 0$$

上式各项除以 $\Delta\sigma$, 并令 $h \rightarrow 0$, 得

$$p_m\mathbf{n} = n_x p_{xx}\mathbf{i} + n_y p_{yy}\mathbf{j} + n_z p_{zz}\mathbf{k}$$

利用关系式 $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$, 将上式写成分量形式, 则有

$$p_m = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$$

上式证明了在理想流体和静止流体中, 法应力的大小与作用面的方位无关。

由于流体不能承受切向作用力, 因此, 理想流体和静止流体的表面力一定是正压的。将作用在单位面积上的压力称为压强。前面的结果表明, 在理想流体和静止流体中, 各个方向的压强都相等。因此, 可用一个量 $-p$ 来表示同一点处的法应力, 即

$$p_m = p_{xx} = p_{yy} = -p$$

式中, p 就是流体的压强, 它是一个标量场函数 $p = p(x, y, z, t)$ 。因此, 在理想流体和静止流体中, 应力矢量可表示为

$$\mathbf{p}_n = p_m\mathbf{n} = -p\mathbf{n}$$

例 2 利用流体力学基本方程求速度场、加速度场和压强场

单位密度的均匀不可压缩理想流体做平面定常流动, 已知 x 方向的速度分量为 $u = 2x$, 沿 y 方向的速度分量 v 在 x 轴上为零, 原点处压强 $p = 3$ 。若不考虑质量力, 求速度场、加速度场和压强场。

解: 速度的 x 分量已知, 只需求出 y 分量 v 。为此, 利用不可压缩流体平面流动的连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -2$$

对 y 积分, 并利用 $y = 0$ 处 $v = 0$ 条件, 可得

$$v = -2y$$

所以速度场为

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

加速度场为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$$

利用欧拉方程求压强场。由于不考虑质量力,有

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 4x, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} = 4y$$

注意, $\rho = 1$ 密度单位, 从而 p 对空间的全微分为

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = -(4xdx + 4ydy)$$

积分得

$$p - p_0 = \int_{(0,0)}^{(x,y)} dp = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} (4xdx + 4ydy) = -2(x^2 + y^2)$$

因为原点处 $p_0 = 3$, 所以压强场为

$$p = 3 - 2(x^2 + y^2)$$

例3 利用流体力学动能方程求流体运动规律

在两端开口的等截面水平小直管中有一段长度为 l 的液体柱, 液体每一点受到外力作用, 其方向沿管轴并指向固定点 O , 其大小与质点距 O 点的距离成正比。设初始时刻 $t = 0$, 液体柱距 O 点最近的一端距离为 R , 并处于静止状态。求液体柱的运动规律。

解: 设在任意时刻 t , 液柱位置如图 3.11 中阴影部分所示, 将该液柱视为不可压缩理想流体。由于液柱沿水平方向运动, 故只考虑水平方向的质量力, 即 $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, 显然这是有势质量力, 力势场为 $U = kx^2/2$ 。因此, 支配液柱运动的方程为

$$VS = V_A S_A \quad (\text{连续性方程}) \quad ①$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma \quad (\text{动能方程}) \quad ②$$

式中, V 和 S 分别为任意位置处流体的速度和水平管的截面积, 而 V_A 和 S_A 分别为左端 A 处流体的速度和水平管的截面积。因为 $S = S_A$, 由方程式 ① 得 $V = V_A = \dot{\xi}$, 即同一时刻, 液柱各点处速度相等, 可用端点 A 的速度表示。注意, 压强满足边界条件 $p_A = p_B = p_a$ (大气压), 考虑 $V_A = V_B$, 则表面力的做功功率为

$$- \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma = - [p_A (-V_A) + p_B V_B] = 0 \quad ③$$

液柱的动能和势能可表示为

$$\int_{\tau} \frac{V^2}{2} \rho d\tau = \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 \rho S \quad ④$$

$$\int_{\tau} U \rho d\tau = \int_{\xi}^{\xi+l} \frac{1}{2} k x^2 \rho S dx = \frac{1}{2} k \rho S \left(\xi^2 + l\xi + \frac{1}{3} l^2 \right) \quad (5)$$

将式③、④和⑤代入式②,化简得

$$\ddot{\xi} + k \left(\xi + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

这是二阶常系数线性齐次常微分方程,其通解为

$$\xi + \frac{l}{2} = a \cos(\sqrt{kt} + \alpha)$$

式中, a 和 α 是积分常数,由初始条件决定。由于 $t = 0$ 时, $\xi = R$, $\dot{\xi} = 0$, 因此,有 $a = R + \frac{l}{2}$, $\alpha = 0$, 从而

$$\xi = -\frac{l}{2} + \left(R + \frac{l}{2} \right) \cos \sqrt{kt} \quad (7)$$

由此确定了端点 A 的运动规律,从而也确定了液柱的运动规律。上式表明,液柱端点 A 以 $x = -l/2$ 点为平衡位置做谐振动,从而液柱中心以 O 为平衡位置做谐振动。

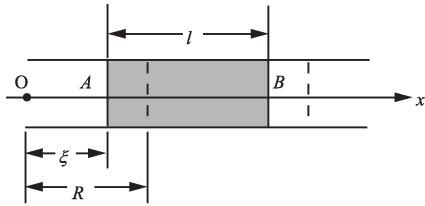


图 3.11 水平管中的液柱

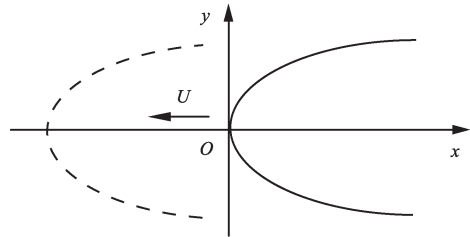


图 3.12 抛物形固壁水平匀速运动

例 4 定解条件问题

在流体中一抛物形固壁以常速 U 沿其凸向运动,建立固定坐标系 Oxy 使其原点 O 与 $t = 0$ 时刻的壁面顶点重合,如图 3.12 所示,设 $t = 0$ 时的壁面方程为 $x = ay^2$ ($a > 0$), u 和 v 为壁上流体的速度分量,证明它们满足

$$\frac{u+U}{v} = 2ay$$

证明: 建立固定坐标系 Oxy 使 x 轴与 $t = 0$ 时刻的抛物形边界的对称轴重合,原点 O 与其顶点重合,则任意时刻 t ,边界方程为

$$x + Ut = ay^2$$

由于抛物形剖面的运动而产生的流体运动是平面运动,其运动学边界条件是

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

这里 $F(x, y, t) = x + Ut - ay^2$, 将其代入上式, 得

$$U + u - 2ayv = 0 \quad \text{即} \quad \frac{u+U}{v} = 2ay$$

得证。

例 5 利用基本方程组求不可压缩理想流体的一维流动问题

例 5.1 用不可压缩理想流体一维基本方程组求例 3 中液体柱的运动规律和压强分布。

解: 取固定点 O 为原点, 管轴为 x 轴(图 3.11), 这是不可压缩理想流体沿 x 轴的一维流动问题。记任意时刻 t 液柱距 O 点最近的一端 A 的坐标为 ξ 。由题意知, 完备方程组和定解条件所组成的定解方程组是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{连续性方程}) \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -kx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{欧拉方程}) \quad ②$$

$$t = 0, \xi = R, \dot{\xi} = 0 \quad (\text{初始条件}) \quad ③$$

$$x = \xi, p = p_a; \quad x = \xi + l, p = p_a \quad (\text{边界条件}) \quad ④$$

由方程式 ① 可知, $u = u(t)$, 即同一时刻液柱各点速度相同, 可用端点 A 的运动描述整个液柱的运动, 因而 $u = \dot{\xi}$, $du/dt = \partial u/\partial t = \ddot{\xi}$ 。由方程式 ② 对 x 积分, 并注意 $\partial u/\partial t$ 与 x 无关, 得

$$\ddot{\xi}x = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{p}{\rho} + C(t) \quad ⑤$$

式中, $C(t)$ 是只与 t 有关的积分常数, 可利用边界条件消去。为此, 将边界条件 ④ 代入式 ⑤ 得

$$\ddot{\xi}\xi = \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{p_a}{\rho} + C(t) \quad \text{和} \quad \ddot{\xi}k(\xi + l) = \frac{1}{2}k(\xi + l)^2 - \frac{p_a}{\rho} + C(t) \quad ⑥$$

将上述两式相减, 得

$$\ddot{\xi} + k(\xi + l) = 0 \quad ⑦$$

这是二阶常系数线性齐次常微分方程。对此方程积分, 并利用初始条件 ③ 决定积分常数, 最后得

$$\xi = -\frac{l}{2} + \left(R + \frac{l}{2}\right) \cos \sqrt{kt} \quad ⑧$$

这就是液柱的运动规律。它表明, 液柱端点 A 以点 $x = -\frac{l}{2}$ 为平衡位置做谐振动, 或液柱中心点以 O 为平衡位置做谐振动, 且速度为

$$u = \dot{\xi} = - \left(R + \frac{l}{2} \right) \sqrt{k} \sin \sqrt{k}t \quad (9)$$

为求压强场,将⑤、⑥两式相减消去 $C(t)$,化简得

$$p = p_a + \rho(x - \xi) \left[-\ddot{\xi} - \frac{k}{2}(x + \xi) \right]$$

将式⑦和⑧代入上式,消去 ξ 和 $\dot{\xi}$,得

$$p = p_a + \frac{k}{2}\rho \left\{ \frac{l^2}{4} - \left[x - \left(R + \frac{l}{2} \right) \cos \sqrt{k}t \right]^2 \right\}$$

这就是液柱中的压强分布。特别地,在液柱中心点 $x = \xi + l/2 = (R + l/2) \cos \sqrt{k}t$,有

$$p = p_a + k\rho l^2/8$$

例 5.2 等截面水平小管与等截面铅垂小管组成 \perp 型管,水平管截面恰好是铅垂管截面的一半,水平管充分长以致当铅垂管中的液体全部流到水平管时也不会从水平管流出(图 3.13)。假设安置在水平管与铅垂管连接处的阀门 K 关闭时,铅垂管中的液柱高度为 a 。求两阀门同时开启后铅垂管中液面高度随时间的变化规律及铅垂管内液体流完所需要的时间。

解: 阀门打开后,一部分液体在铅垂管内,另一部分在水平管内,设铅垂管内液面高度为 ζ ,水平管内液面前进距离为 ξ ,建立坐标系如图 3.13 所示。

铅垂管和水平管内液体均做一维流动,由于对称性,水平方向只考虑右侧管内流动,则沿铅垂和水平方向的定解方程组分别为

$$\begin{array}{l|l} \text{铅垂方向} & \text{水平方向} \\ \hline \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2) \\ t = 0, \zeta = a, \dot{\zeta} = 0 & t = 0, \xi = 0, \dot{\xi} = 0 \quad (3) \\ z = \zeta, p = p_a; z = 0, p = p_0 & x = 0, p = p_0; x = \xi, p = p_a \quad (4) \end{array}$$

由方程①知, $w = w_t, u = u_t$, 因此

$$w = \zeta, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{\zeta} \quad \text{和} \quad u = \xi, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{\xi}$$

由式②分别对 z 和 x 积分,并注意 $\partial w/\partial t$ 和 $\partial u/\partial t$ 分别与 z 和 x 无关,得

$$\ddot{\zeta}z = -gz - \frac{p}{\rho} + C_1(t) \quad \text{和} \quad \ddot{\xi}x = -\frac{p}{\rho} + C_2(t) \quad (5)$$

将边界条件④代入式⑤,并将同一方向的两式相减,消去 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$,得

$$\frac{p_0 - p_a}{\rho} = (\ddot{\zeta} + g)\zeta \quad \text{和} \quad \frac{p_0 - p_a}{\rho} = \ddot{\xi}\xi \quad (6)$$

由式⑥消去 $(p_0 - p_a)/\rho$,得

$$(\ddot{\zeta} + g)\zeta = \dot{\xi}\dot{\xi} \quad (7)$$

由于液体不可压缩,体积保持不变,而水平管截面是铅垂截面的一半,因此

$$\zeta + \xi = a \quad \text{或} \quad \dot{\zeta} + \dot{\xi} = 0 \quad (8)$$

将式⑧代入式⑦,消去 ξ 和 $\dot{\xi}$,得

$$\ddot{\zeta} + \frac{g}{a}\zeta = 0 \quad (9)$$

这是二阶常系数线性齐次常微分方程。对此方程积分,并利用初始条件③决定积分常数,得铅垂管内液面随时间的变化规律是

$$\zeta = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \quad (10)$$

则铅垂管内的液体流空(即达到 $\zeta = 0$)的时间是 $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$ 。

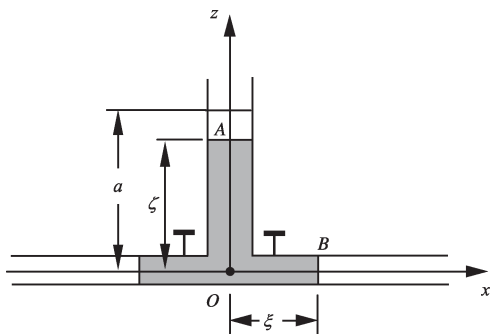


图 3.13 T型管出流

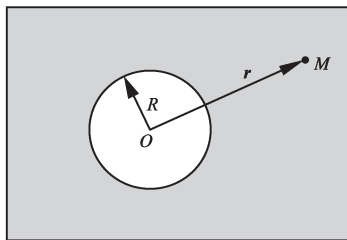


图 3.14 球形空腔

例 5.3 在充满整个空间的不可压缩静止流体中,突然形成一个半径为 a 的球形空腔。设流体密度为 ρ ,无穷远处压强为 p_∞ ,质量力不计。求流体填满空腔所需的时间。

解:取球坐标系的原点 O 在球形空腔的中心(图 3.14)。在空腔缩小的过程中,流体呈径向球对称,所以 $v_r = v_r(r, t)$, $v_\theta = v_\phi = 0$ 。设在任意时刻 t ,空腔半径为 $R(t)$ 。由题意得,定解方程组为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

$$t = 0, \quad R(t) = a, \quad v_r = 0, \quad V \equiv \frac{dR}{dt} = 0 \quad (3)$$

$$r = R(t), \quad v_r = V \equiv \frac{dR}{dt}, \quad p = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad v_r = 0, \quad p = p_\infty \quad (4)$$

由方程①得

$$r^2 v_r = C(t) \quad \text{或} \quad C(t) = r^2 v_r = R^2(t) \frac{dR}{dt} \quad (5)$$

由式⑤代入方程②,有

$$\frac{C'(t)}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

上式对 r 从 ∞ 到 $R(t)$ 积分,并利用边界条件④,得

$$\frac{C'(t)}{R(t)} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{p_\infty}{\rho}$$

利用式⑤消去上式中 $C'(t)$,整理得

$$\frac{d(V^2/2)}{\frac{3V^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}} = -\frac{dR}{R}$$

积分上式,并利用初始条件③,得

$$\frac{3}{2} V^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \frac{a^3}{R^3} \quad \text{或} \quad V = -\sqrt{\frac{2p_\infty}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right)} \quad (6)$$

式中,负号表示空腔是逐渐缩小的。

流体填满空腔所需的时间是

$$T = \int_0^T dt = \int_a^0 \frac{dR}{V} = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_\infty}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{a^3/R^3 - 1}}$$

式中,积分为广义积分,当 $R \rightarrow a$ 时,被积函数趋于无穷大。为计算其积分值,令 $\eta = \frac{a^3}{R^3}$, 有

$$\int_0^a \frac{dR}{\sqrt{a^3/R^3 - 1}} = \frac{a}{3} \int_0^1 \eta^{-1/6} (1-\eta)^{-1/2} d\eta = \frac{a}{3} B\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

式中,B函数定义为 $B(p, q) = \int_0^1 \eta^{p-1} (1-\eta)^{q-1} d\eta$, 而 Γ 函数定义为 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \eta^{\alpha-1} e^{-\eta} d\eta$,

两者关系为 $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, 因此, $B(5/6, 1/2) = \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)}$, 查 Γ 函数表,得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.7725, \quad \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.8934, \quad \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \approx 1.1276$$

所以

$$T = \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)} a \sqrt{\frac{\rho}{6p_\infty}} \approx 0.9135a \sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}$$

例6 伯努利积分和拉格朗日积分的应用

例6.1 皮托管流速计。这是用来测量流速的一种仪器,其构造原理如图3.15所示。小钝头体上装有两根细管,细管A的一端置于钝体前部,小口朝向来流,细管B的一端小口在钝体侧壁,两根管另一端接在U形管压强计上。通过压强计中液面的高度差 h 可测得两管口处的压强差 $p_A - p_B$ 。试证明所测流速为

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}$$

式中,将待测流体的密度 ρ 看作常数。

证明:设不可压缩理想流体在重力场中做定常流动。将伯努利积分(3.59)分别应用于流线OA和O'B,得

$$\frac{V_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\rho} = \frac{V_O^2}{2} + gz_O + \frac{p_O}{\rho}$$

和

$$\frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho} = \frac{V_{O'}^2}{2} + gz_{O'} + \frac{p_{O'}}{\rho}$$

注意,A点处流体受阻,速度为零,该点又称为驻点。又因点O和O'靠得很近,可认为速度、高度和压强均相等,因此有

$$gz_A + \frac{p_A}{\rho} = \frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho}$$

由于两细管靠得很近,有 $z_A \approx z_B$,上式简化为

$$V_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}$$

得证。

例6.2 托里拆利小孔出流公式。在重力作用下,容器中液体从容器底部小孔出流情况如图3.16所示,试证明小孔出流速度可近似表示为

$$V_B \approx \sqrt{2gh}$$

证明:由于容器截面 S_A 远大于孔口截面 S_B ,可以认为容器内液面离孔口中心的高度 h 在短时间内是恒定的,因而可以认为流动是定常的,从

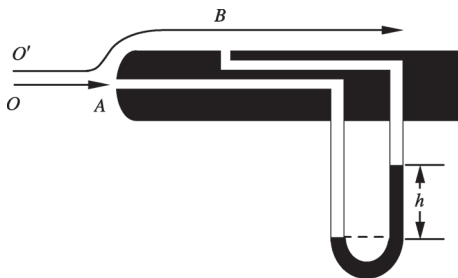


图3.15 皮托管流速计

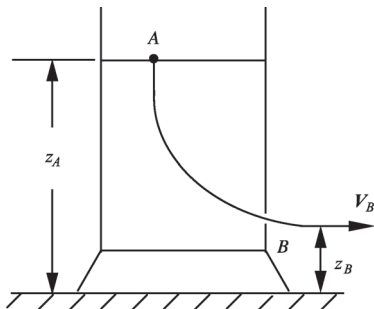


图3.16 容器的小孔出流

而定解方程组是

$$V_B S_B = V_A S_A \quad (\text{连续性方程}) \quad ①$$

$$\frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho} = \frac{V_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\rho} \quad (\text{伯努利方程}) \quad ②$$

$$p_A = p_B = p_a \quad (\text{边界条件}) \quad ③$$

由式①得 $V_A = V_B \frac{S_A}{S_B}$, 将其代入方程②, 并利用边界条件③, 注意, $z_B - z_A = h$, 得

$$V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (S_B/S_A)^2}}$$

考虑到 $S_B/S_A \ll 1$, 得

$$V_B \approx \sqrt{2gh}$$

这就是托里拆利小孔出流公式, 它是意大利科学家托里拆利在 1643 年得出的。公式表明, 在重力作用下液体从容器液面下 h 深处小孔的流出速度与物体从同一高度自由下落到该处时的速度相同。

例 6.3 弯曲河段水面倾斜问题。设河水做定常无旋运动, 试证明在弯曲河段内侧 A 处的水流速度大于外侧 B 处的水流速度, 如图 3.17 所示, 且水面向内侧倾斜, 即 A 处水面低于 B 处水面。

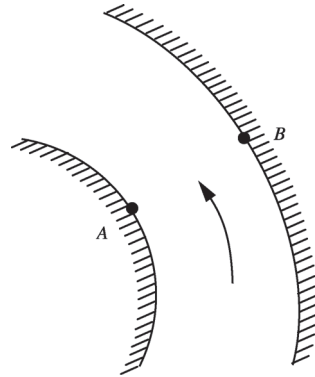


图 3.17 弯曲河段

证明: 将河水看作理想不可压缩重力流体, 且做定常无旋运动。引入速度势 ϕ , 则定解方程组和边界条件可写为

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{连续性方程}) \quad ①$$

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C \quad (\text{拉格朗日积分}) \quad ②$$

$$p|_{\text{水面上}} = p_a (\text{大气压}) \quad (\text{水面上边界条件}) \quad ③$$

先解方程①, 求速度势 ϕ , 进而求出速度 V 。采用柱坐标 (R, φ, z) , 设弯曲河段处的流线的圆弧, 则

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = v_R = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z = 0$$

所以速度势仅仅是 φ 的函数, 即 $\phi = \phi(\varphi)$, 因而方程①简化为

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

积分得

$$\phi = C_1\varphi + C_2 \quad (4)$$

式中, C_1, C_2 都是积分常数。进一步可求得速度为

$$V = v_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{C_1}{R} \quad (5)$$

由于 $R_A < R_B$, 因此, $V_A > V_B$, 即内侧 A 处的流速大于外侧 B 处的流速。

再将方程 (2) 应用于 A, B 两点, 有

$$\frac{V_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\rho} = \frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho}$$

利用边界条件 (3), 得

$$\frac{V_A^2}{2} + gz_A = \frac{V_B^2}{2} + gz_B \quad (6)$$

因为 $V_A > V_B$, 所以由上式知 $z_A < z_B$, 即内侧 A 处水面低于外侧 B 处水面, 水面向内侧倾斜。

例7 布拉休斯(Blasius)公式和库塔-茹科夫斯基定理

布拉休斯公式是不可压缩理想流体绕任意形状柱体流动时作用于其上的力和力矩的一般公式, 证明式(3.80)(库塔-茹科夫斯基定理)对有环量的绕任意形状柱体的流动仍然成立。

证明: (1) 布拉休斯公式

考虑一无限长柱体, 若来流速度与柱体母线垂直, 则流体的运动依然是平面运动。设柱体剖面的周线为 L , 柱体表面上的压强记为 p , \mathbf{n} 和 \mathbf{t} 分别为周线任一点处的法向和切向单位矢量, 如图 3.18 所示, 则流体作用于单位长度柱体上的力的合矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= -\oint_L p \mathbf{n} dl = -\oint_L p [\cos(n, x)\mathbf{i} + \cos(n, y)\mathbf{j}] dl \\ &= -\mathbf{i} \oint_L p \cos(t, y) dl + \mathbf{j} \oint_L p \cos(t, x) dl \\ &= -\mathbf{i} \oint_L p dy + \mathbf{j} \oint_L p dx \\ &= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \end{aligned}$$

用复数表示为

$$\begin{aligned} R &= R_x + iR_y = \oint_L p(-dy + idx) = i \oint_L p(dx + idy) \\ &= i \oint_L p dz \end{aligned} \quad (1)$$

再利用拉格朗日积分, 并取其共轭复数为

$$\bar{R} = -i \frac{\rho}{2} \oint_L V^2 \bar{dz} \quad (2)$$

式中, $V^2 = \left(\frac{dW}{dz}\right)\overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)}$ 。注意, L 是流线, 速度 $\bar{V} = \overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)} = u + iv$ 沿 L 切线方向, 它与沿 L 的 dz 有相同的辐角, 所以

$$V^2 \bar{dz} = \left(\frac{dW}{dz}\right)\overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)} \bar{dz} = \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 e^{i2\theta} dz e^{-i2\theta} = \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (3)$$

将其代入式(2), 得

$$\bar{R} = -i \frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (4)$$

或
$$R_x = \operatorname{Re}\left[i \frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right], \quad R_y = \operatorname{Im}\left[-i \frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right]$$

这就是流体绕柱体流动时对柱体的作用力的布拉休斯公式。

流体作用于单位长度柱体上的力对原点的力矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \oint_L [\mathbf{r} \times (-p\mathbf{n})] dl = -\mathbf{k} \oint_L p [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)] dl \\ &= -\mathbf{k} \oint_L p [-x\cos(t, x) - y\cos(t, y)] dl \\ &= -\mathbf{k} \oint_L p (x dx + y dy) \end{aligned}$$

利用拉格朗日积分, 并注意 $x dx + y dy = \operatorname{Re}(z \bar{dz})$, 得

$$M = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2} \oint_L V^2 z \bar{dz}\right]$$

再利用式(3), 得

$$M = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 z dz\right] \quad (5)$$

这就是流体对柱体作用力矩的布拉休斯公式。

(2) 库塔-茹科夫斯基定理

设流动的复势为 $W = f(z)$, 作圆周 C 包围柱体, 使柱体剖面周线 L 包在 C 的内部。从而 $dW/dz = f'(z)$ 在 L 外部解析, 自然在 C 外部也解析, 可把 dW/dz 展成罗朗级数。注意, 边界条件为

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{z=\infty} = f'(\infty) = U \quad (6)$$

可知 $z = \infty$ 是 dW/dz 的正则点, 其罗朗级数没有正整数幂项, 可设

$$\frac{dW}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (7)$$

由边界条件(6)可确定 $A_0 = U$ 。考虑到流体不可压缩且流场中无源, 即 $Q = 0$, 有

$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \Gamma$, 将其代入上式, 可确定 $A_1 = \Gamma/(2\pi i)$ 。将上述结果代入关于作用力的布拉休斯公式④, 得

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}} &= i \frac{\rho}{2} \oint_C \left(U + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz \\ &= i \frac{\rho}{2} \oint_C \left[U^2 + \frac{U\Gamma}{\pi i} \frac{1}{z} + \left(2UA_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{z^2} + \dots \right] dz \\ &= i\rho U\Gamma\end{aligned}$$

从而

$$R_x = 0, \quad R_y = -\rho U\Gamma \quad (8)$$

上式与式(3.79)完全相同。它表明, 不可压缩理想流体做有环量的绕任意形状的柱体流动时, 流体对单位长柱体的作用力大小为 $\rho U\Gamma$, 作用力的方向与无穷远处的来流速度 U 的方向垂直, 这就是著名的库塔-茹科夫斯基定理。该定理在航空及舰船工程等方面有着重要应用, 它说明, 要产生升力, 除物体必须在流体中运动外, 同时环绕物体还应具有速度环量。

利用式⑤可得流体作用在单位长度柱体上的力矩为

$$\begin{aligned}M &= \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 z dz \right] = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\rho}{2} \oint_C \left[U^2 z + \frac{U\Gamma}{\pi i} + \left(2UA_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{z} + \dots \right] dz \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \cdot 2\pi i \left(2UA_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \right] = \operatorname{Re}(-2\pi\rho UA_2 i) = 2\pi\rho U \operatorname{Im}(A_2)\end{aligned}$$

可见, 力矩 M 取决于来流速度 U 和复速度 dW/dz 的罗朗级数展开式中 z^{-2} 项的系数 A_2 , 其值与柱体剖面周界的形状和方位有关。

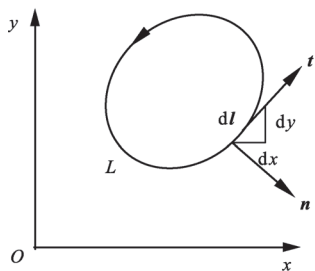


图 3.18 作用于柱体上的力

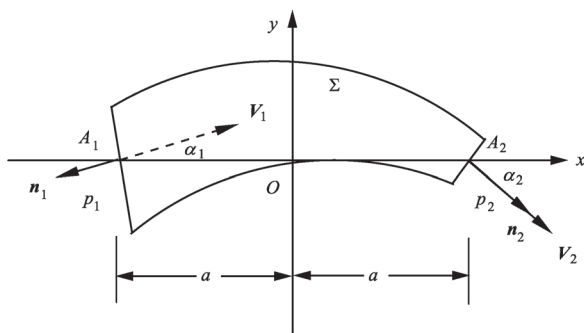


图 3.19 弯管流动

例 8 积分形式动量方程和动量矩方程的应用

例 8.1 设水平管道弯曲段中密度为 ρ 的不可压缩理想流体做定常流动, 通过

任一截面的流量为 Q , 进口截面和出口截面的面积分别为 A_1 和 A_2 , 两截面处的流速与两截面中心连线的夹角分别为 α_1 和 α_2 , 见图 3.19, 进口截面处压强为 p_1 。不考虑质量力, 求流体对这段弯曲管的作用力和对通过如图所示原点垂直轴的力矩。

解: 取弯曲管壁 Σ 与两截面 A_1 和 A_2 所围的区域为控制体, 流体中控制面为 $S = A_1 \cup A_2$, 设两截面处的速度、压强和外法向单位矢量分别为 $\mathbf{V}_1, p_1, \mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{V}_2, p_2, \mathbf{n}_2$, 利用式(3.83b), 不考虑质量力, 有

$$\mathbf{R} = - \int_{A_1 \cup A_2} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{V}\rho V_n) d\sigma = - \{ [p_1\mathbf{n}_1 + \mathbf{V}_1\rho(-V_1)]A_1 + [p_2\mathbf{n}_2 + \mathbf{V}_2\rho V_2]A_2 \} \quad (1)$$

从而

$$\begin{cases} R_x = (p_1 + \rho V_1^2)A_1 \cos\alpha_1 - (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \cos\alpha_2 \\ R_y = (p_1 + \rho V_1^2)A_1 \sin\alpha_1 + (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \sin\alpha_2 \end{cases} \quad (2)$$

根据连续性方程 $V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$, 有

$$V_1 = \frac{Q}{A_1}, \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} \quad (3)$$

再利用伯努利积分, 有

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = p_1 + \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \quad (4)$$

将式③和④代入式②, 得

$$\begin{cases} R_x = p_1(A_1 \cos\alpha_1 - A_2 \cos\alpha_2) + \rho Q^2 \left(\frac{\cos\alpha_1}{A_1} - \frac{\cos\alpha_2}{2A_2} - \frac{A_2 \cos\alpha_2}{2A_1^2} \right) \\ R_y = p_1(A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2) + \rho Q^2 \left(\frac{\sin\alpha_1}{A_1} + \frac{\sin\alpha_2}{2A_2} + \frac{A_2 \sin\alpha_2}{2A_1^2} \right) \end{cases} \quad (5)$$

利用式(3.84b), 不考虑质量力, 则流体对弯曲管段的力矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= - \int_{A_1 \cup A_2} [(\mathbf{r} \times \mathbf{n})p + (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho V_n] d\sigma \\ &= - \{ [(-a\mathbf{i}) \times (-\cos\alpha_1\mathbf{i} - \sin\alpha_1\mathbf{j})p_1 + (-a\mathbf{i}) \times (\cos\alpha_1\mathbf{i} + \sin\alpha_1\mathbf{j})V_1\rho(-V_1)]A_1 \\ &\quad + [a\mathbf{i} \times (\cos\alpha_2\mathbf{i} - \sin\alpha_2\mathbf{j})p_2 + a\mathbf{i} \times (\cos\alpha_2\mathbf{i} - \sin\alpha_2\mathbf{j})V_2^2\rho]A_2 \} \\ &= a[(p_2 + \rho V_2^2)A_2 \sin\alpha_2 - (p_1 + \rho V_1^2)A_1 \sin\alpha_1] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6)$$

将式③和④代入上式, 得

$$\mathbf{M} = a \left[p_1(A_2 \sin\alpha_2 - A_1 \sin\alpha_1) + \rho Q^2 \left(\frac{A_2 \sin\alpha_2}{2A_1^2} + \frac{\sin\alpha_2}{2A_2} - \frac{\sin\alpha_1}{A_1} \right) \right] \mathbf{k} \quad (7)$$

如果管道是等截面的, 且弯曲段为一段圆弧, 则 $A_1 = A_2 = A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, 从而 $V_1 = V_2 = V = Q/A, p_1 = p_2 = p$, 所以

$$R_x = 0, \quad R_y = 2(p + \rho V^2)A \sin\alpha = 2 \left(\rho A + \frac{\rho Q^2}{A} \right) \sin\alpha \quad \text{和} \quad |\mathbf{M}| = 0 \quad (8)$$

表明合力沿 y 轴方向, 且力的作用线与 y 轴重合。

例 8.2 密度为 ρ 的液体流过宽为 b 的水平平板, 在平板前缘流动是均匀的, 速度为 U , 在平板的后缘, 流速的水平分量为

$$u = \begin{cases} U \frac{y}{h} & (0 \leq y < h) \\ U & (y \geq h) \end{cases}$$

式中, y 为距平板的高度。假设流动是定常的, 压强均匀分布, 求流体作用于平板的水平力。

解: 取平板表面 Σ 和图中虚线所示的 $OABC$ 面为控制面, 如图 3.20 所示。

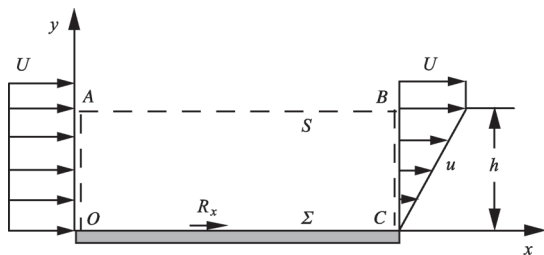


图 3.20 流体作用于平板的水平力

利用式(3.83b), 考虑到 $\mathbf{F} = -g\mathbf{j}$ 沿铅垂方向, 压强分布均匀, OA 面和 BC 面上的表面力互相平衡, 则有

$$R_x = - \left(\int_S \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x = \left[\left(\int_{OA} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x + \left(\int_{AB} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x + \left(\int_{BC} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x \right] \quad (1)$$

其中

$$\left(\int_{OA} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x = \int_{OA} u \rho (-u) d\sigma = \int_0^h U \cdot \rho (-U) b dy = -\rho U^2 b h$$

$$\left(\int_{BC} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x = \int_{BC} u \rho u d\sigma = \int_0^h \rho \left(U \frac{y}{h} \right)^2 b dy = \frac{1}{3} \rho U^2 b h$$

注意, 式①中方括号内的第二项表示通过 AB 面动量的净流出率沿 x 方向的分量, 为了计算此项, 可先计算通过 AB 面的质量流量, 为此将液体看作不可压缩流体, 由连续性方程:

$$\int_{OA} \rho V_n d\sigma + \int_{AB} \rho V_n d\sigma + \int_{BC} \rho V_n d\sigma = 0$$

所以, 通过 AB 面流出的质量流量是

$$\begin{aligned} (Q_m)_{AB} &= \int_{AB} \rho V_n d\sigma = - \left(\int_{OA} \rho V_n d\sigma + \int_{BC} \rho V_n d\sigma \right) \\ &= - \left[\int_0^h \rho (-U) b dy + \int_0^h \rho U \frac{y}{h} b dy \right] = \frac{1}{2} \rho U b h \end{aligned}$$

AB 面上沿 x 方向的速度为 U , 因此, 通过 AB 面的净流出率沿 x 方向的分量为

$$\left(\int_{AB} \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x = (Q_m)_{AB} U = \frac{1}{2} \rho U^2 bh$$

将以上结果代入式①,得

$$R_x = - \left(\int_S \mathbf{V} \rho V_n d\sigma \right)_x = - \left(-\rho U^2 bh + \frac{1}{2} \rho U^2 bh + \frac{1}{3} \rho U^2 bh \right) = \frac{1}{6} \rho U^2 bh$$

例 9 等温大气的压高公式

解:大气为重力流体,建立标准当地直角坐标系,即取 Oxy 平面为海平面, Oz 轴垂直向上,不考虑重力加速度 \mathbf{g} 随高度的变化,则重力位势为 $U = gz$ 。又等温大气为正压大气,密度和压强之间关系为

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} \quad \text{或} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{p}$$

式中, p_1 和 ρ_1 为某高度 z_1 处的压强和密度,因此,正压函数为

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{p_1}{\rho_1} \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln p$$

将以上结果代入式(3.94),得

$$gz + \frac{p_1}{\rho_1} \ln p = C$$

式中,常数 C 由边界条件决定,这里由 $p|_{z=z_1} = p_1$,求得 $C = \frac{p_1}{\rho_1} \ln p_1 + gz_1$,代入上式整理,有

$$p = p_1 e^{-\frac{\rho_1 g}{p_1}(z-z_1)} = p_1 e^{-\frac{g}{RT}(z-z_1)}$$

这就是等温大气压强随高度的变化关系,称为等温大气的压高公式,式中利用了物态方程。

实践题

1. 设不可压缩理想重力流体中的压强为 $p = p_0 - \rho gz$, 求流体中正六面体各面上的应力矢量和表面力以及整个六面体受到的表面力的合力。

2. 已知理想重力流体的速度场为

$$\mathbf{V} = (6xy + 5xt)\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j} + (7xy^2 - 5zt)\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

取 x, y 轴沿水平方向, z 轴竖直向上,求 $t = 3 \text{ s}$ 时在 $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}(\text{m})$ 处的气压梯度力(取 $g = 10 \text{ m/s}^2$)。

3. 已知理想不可压缩重力流体做定常运动,其压强场为

$$p = 4x^3 - 2y^2 - yz^2 + 5z \quad (\text{Pa})$$

取 x, y 轴沿水平方向, z 轴竖直向上, 若流体的密度为 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, 求 $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}(\text{m})$ 处流体的加速度。

4. 如果不可压缩理想流体在单连通空间内做无旋运动, 试证明流场中封闭曲面 σ 所围区域内, 流体总动能可表示为

$$E_k = \frac{\rho}{2} \oint_{\sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma$$

式中, ρ, ϕ 分别为流体的密度和速度势, \mathbf{n} 为面元 $d\sigma$ 的外法向。

5. 在充满无限空间的不可压缩液体中, 有一球形气泡, 由于气泡膨胀, 压力均匀地作用在气体与液体的界面上, 液体将沿径向向外运动。已知气泡半径 $b = b(t)$, 并设无穷远处液体的压强为 p_{∞} , 质量力不计, 试先利用积分形式的连续性方程求速度场, 然后再利用积分形式的动能方程求压强场, 并求气体与液体界面上的压强。

6. 气体在等温条件下沿等截面直管流动, 取 x 轴沿管轴, 不计质量力, 并认为同一截面各点处流速 u 相同。(1) 写出支配气体流动的完备微分方程组; (2) 构造一个仅含 u 的微分方程。

7. 在流体中有一半径为 a 的固体球以常速 $U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}$ 运动, 设 $t = 0$ 时球心在坐标原点。(1) 写出任意时刻 t 球面的方程; (2) 求球面边界上流体速度分量 u, v, w 应满足的关系式。

8. 如图 3.21 所示, 在两端封闭的等截面水平直管中, 有一段长度为 l , 密度为 ρ 的液体柱, 液柱两端是气体, 平衡时两端气柱长度均为 a , 压强均为 p_0 。在初始时刻, 使液柱有一微小偏移 ξ_0 , 并处于静止。求此后液柱的运动规律及液体中的压强分布。(提示: 以 O 为原点, 在液柱平衡位置建立坐标系。)

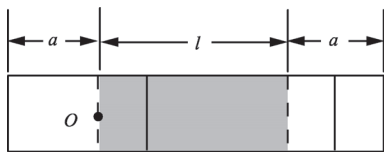


图 3.21 水平直管中液体振荡问题

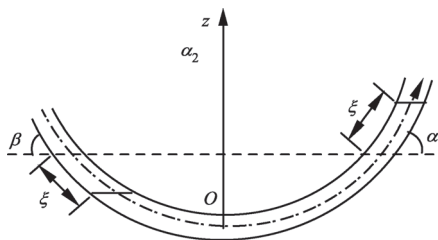


图 3.22 弯管中液体振荡问题

9. 液体在等截面弯曲开口细管中做小振荡, 如图 3.22 所示, 两边液面附近管的水平倾角分别为 α 和 β , 液柱总长度为 l , 设 $t = 0$ 时刻, 液柱一端偏离平衡位置的距离是 ξ_0 , 且为静止状态, 求液柱的运动规律 $\xi(t)$ 。

10. 一桶的底部有一小漏洞, 水从洞中漏出, 设桶内水面距桶底 30 cm, 求下列各种情形下从洞中漏出的水相对于桶的速度: (1) 桶固定不动; (2) 桶匀速上升; (3) 桶以

1. 2 m/s^2 的加速度上升。

11. 箱盛满水后,水从箱侧壁小孔喷出。(1)证明从不同高度处小孔射出的水都以相同的速率到达地面;(2)要使水流射到地面的水平距离最远,小孔应在什么高度处。

12. 设在流场中高度为 z_0 的某点处,速度和压强分别等于 v_0 和 p_0 。试证明对于理想不可压缩重力流体的定常无旋运动,流体中高度为 z 的任一点处的速度值不超过

$$\sqrt{V_0^2 + 2g(z_0 - z) + \frac{2p_0}{\rho}}$$

13. 文丘利(Venturi)管流量计,是用来测量管道中流体做定常流动时体积分量的仪器,如图 3.23 所示,它由粗细不均的一段管子组成,截面分别为 S_A 和 S_B 处的管壁各开一小孔,并与 U 形管压强计相连。通过压强计中液面的高度差 h 可测得两截面处的压强差 $p_A - p_B$ 。设管中的流体是不可压缩的,试证明管中流体的流量为

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)S_A^2 S_B^2}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}}$$

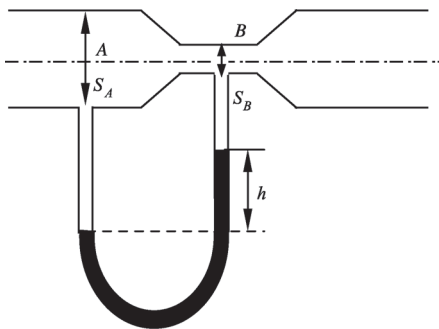


图 3.23 文丘利管流量计

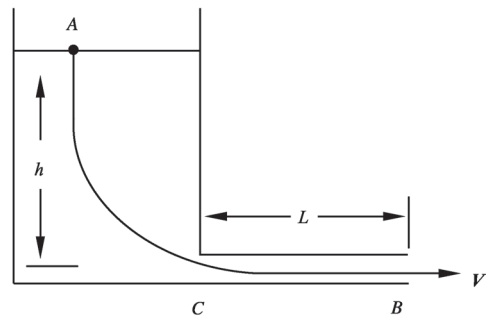


图 3.24 旁管出流问题

14. 旁管出流问题。开口大容器中的液体在重力作用下从容器下部的水平旁管流出,如图 3.24 所示,设容器截面积为 S_A ,旁管长度和截面积分别为 L 和 S_B ,如果 $S_A \gg S_B$,认为液面下降速度 $V_A \approx 0$,把容器内液面离旁管轴线的高度 h 看作常数,求出流开始到出现定常流动这段时间内出流速度随时间的变化规律。

15. 以 $Q = 150 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的流量将水匀速地注入桶内,桶底有一面积为 $S_b = 0.5 \text{ cm}^2$ 的小孔,求水面将在桶中保持多高的高度。

16. 如图 3.25 所示,等截面开口 U 形管竖直放置,管内充水,水柱总长度为 l 。若初始时刻两边水面高度差为 h ,且处于静止,求此后水柱的运动规律。

17. 设一蒙古包做成半径为 a 的半圆柱形,如图 3.26 所示,当受到速度为 U 的大风袭击时,它将有因受到升力而离开基础的危险。假定蒙古包为无限长,空气的运动

可看作不可压缩理想流体绕蒙古包的无旋运动,空气密度为 ρ ,求单位长度蒙古包所受到的升力。

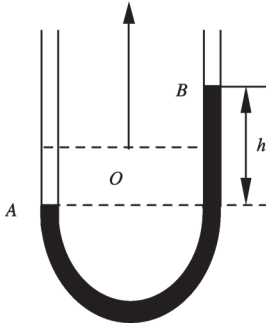


图 3.25 U 形管中液体振荡

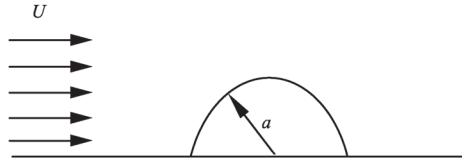


图 3.26 半圆柱升力

18. 设不可压缩理想流体绕半径为 a 的无限长圆柱做有环量的平面势流,取坐标原点在圆柱轴上,设无穷远处压强为 p_∞ ,流速 U 沿 x 轴正向,绕圆柱的速度环量为 Γ 。(1) 写出此平面势流的速度势 ϕ 应满足的边界条件;(2) 证明

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

满足上述边界条件。

19. 如图 3.27 所示,弯月板以匀速 U 沿不可压缩流体的喷射方向运动,若喷射面为 A ,相对于地面的速度为 V_1 ($V_1 > U$),试求喷射流对弯月板的水平作用力。

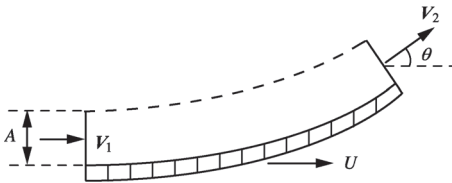


图 3.27 射流冲击作用力

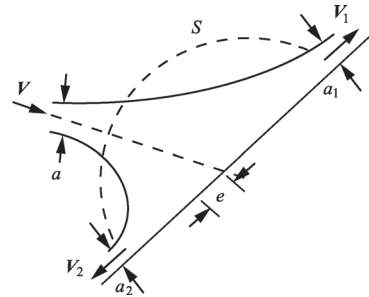


图 3.28 射流冲击平板

20. 一宽度为 a 的平面射流以匀速 V 向无限长平板斜射过来,接触平板后分为两支沿平板的流动,至远处变成宽为 a_1 和 a_2 的两股射流,如图 3.28 所示。设流体是理想不可压缩的,且流动是定常的, V 很大,可忽略重力。求射流对平板的总压力及其作用点,以及 a_1, a_2 与 a 之间的关系。

21. 已知一个水箱通过底部一个细长管出流,如图 3.29 所示,设管长为 l ,截面积

为 A , 流入水箱的水使长管出流速度满足关系式 $V = V_0 - at$, 式中, V_0 和 a 均为常数。试求使水箱保持在原处的力的水平分量。

22. 一矩形平板闸门竖直放置, 上边与水面相平, 底边深度为 b , 闸门宽度为 a , 如图 3.30 所示。设大气压强为 p_0 , 水的密度为 ρ , 求水对闸门的总压力及压力中心的位置。

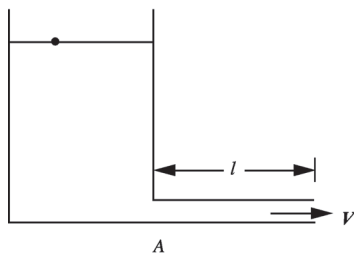


图 3.29 题 21 图

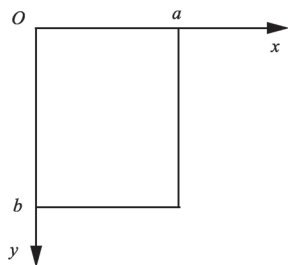


图 3.30 题 22 图

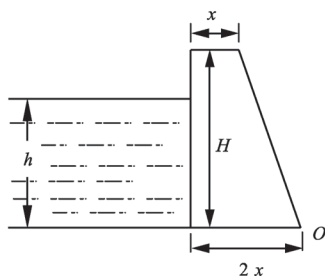


图 3.31 题 24 图

23. 自引力场的质量力有势, $F = -\nabla U$, 引力势 U 满足关系式: $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$, 式中, G 为引力常数, ρ 为密度。现有处于自引力场中静止的一团球形气体, 设 $\rho = \rho_0(1 - \beta r^2)$, 式中, ρ_0 为球心处的密度, r 为距球心的距离, β 为常数。如果球体半径为 a , 球面压强为零, 求球心处的压强 p_0 。

24. 一座用砂石水泥建筑的水坝如图 3.31 所示, 坝长与图面垂直, 长度为 30 m, 坝高 $H = 4$ m, 坝底部宽度为顶部宽度的两倍。坝后水深 $h = 3$ m, 坝体每立方米重 2 T。(1) 如果坝的重量为水对坝的水平作用力的 10 倍, 求坝顶宽度 x ; (2) 计算坝的重力和水对坝的水平作用力的转矩(对经过 O 点的坝基边线), 说明坝是否稳固。

本章小结

理想流体动力学是研究作用于流体的力及其与流体运动的关系, 建立微分形式和积分形式的理想流体动力学基本方程, 以及它们在解决一维流动和圆柱流动等简单流体力学问题中的应用。

1. 基本概念

(1) 作用在流体上的力: 分为质量力和表面力两大类。

(2) 应力矢量 \mathbf{p}_n : 作用于法向为 \mathbf{n} 的单位面元上的表面力, 它是一个矢量, 不仅取决于作用点的位置和时间, 还与受作用面元的方位有关(与一般矢量的区别)。

作用在整个 σ 面上的表面力: $\int_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma$; 理想流体和静止流体中的表面力: $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$ 。

(3) 流体运动方程组的完备性:支配流体运动的独立方程数等于未知函数的数目,所构成的方程组称为完备方程组。通常只有对流体或流动的性质做一些假定或简化,才能建立流体运动的完备方程组。

(4) 定解条件:确定流体运动具体形式的条件,分为初始条件和边界条件。

初始条件:对于不定常流动,初始时刻未知物理量的空间分布。

边界条件:包括运动学和动力学边界条件两类。前者为速度满足的边界条件,后者为压强满足的边界条件。边界是指两流体介质之间、流体与固体介质之间,以及无穷远的位置。

2. 基本理论

(1) 理想流体动量方程:包括积分形式和微分形式,其微分形式为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \text{ (对流体质点)}$$

$$\text{或 } \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \text{ (对控制体)}$$

又称为欧拉方程。

(2) 理想流体能量方程:理想流体的总能量包括内能和动能,理想流体能量方程由能量转换和守恒定律导出,包括积分形式和微分形式。注意,动能方程可由动量方程导出,故为非独立方程。

(3) 理想流体动量矩方程:包括积分形式和微分形式。

(4) 流体静力学

基本方程: $\rho \mathbf{F} = \nabla p$ 。

相容条件: $\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ 。

帕斯卡原理:不可压缩流体 $\Delta p = \Delta p_0$; 正压流体 $\Delta p / \rho = \Delta p_0 / \rho_0$ 。

阿基米德原理:流体浸入表面积为 σ 、体积为 τ 的物体的作用力为 $\mathbf{R} = -\oint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = mg\mathbf{k}$, 即大小等于物体所排开流体的重量,方向竖直向上,称为浮力。作用力的主矩为

$$\mathbf{M} = -\int_{\tau} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\tau = \left(\int_{\tau} \mathbf{r} \rho d\tau \right) \times g\mathbf{k} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{R}$$

式中, \mathbf{r}_c 是物体所排开流体体积的质心位置矢量,它表明浮力作用在物体的质心上。

3. 基本方法

- (1) 已知速度分布,利用欧拉方程求解压强场分布;
- (2) 理想不可压缩流体一维流动的求解方法;
- (3) 利用欧拉方程的首次积分求解方法;
- (4) 利用控制体的动量积分方程和动量矩积分方程求理想流体作用于物体的力和力矩之方法;
- (5) 圆柱绕流以及任意形状柱体绕流的作用力的计算方法。

第 4 章 流体涡旋运动基础

前三章建立了流体运动学和理想流体动力学的基本方程组,即连续性方程、动量方程和能量方程等。本章将用这组基本方程分析一种自然界常见的流体运动形式,即流体的涡旋运动。

流体的涡旋运动指的是每个流体质点都有自旋(角速度不为零)的运动。著名学者陆士嘉曾精辟地指出:流体的本质就是涡,因为流体经不起搓,一搓就搓出了涡。在流体中存在许多不同尺度的涡,它是一种常见的运动形式。例如台风和龙卷等重要天气现象就是典型的涡旋运动。由于地球的自转效应,大气运动总是有旋的,并且这种涡旋运动与天气系统的发生、发展有着密切的联系。此外,流体绕过固体后形成的一系列涡旋,例如三角翼上脱体涡的形成与破裂等,都对其承载及动力学特性产生重要影响。因此,研究涡旋运动具有明显的实际意义。另一方面对无旋运动可利用速度势 ϕ ,通过求解关于 ϕ 的拉普拉斯方程(或泊松方程)和拉格朗日积分来得到流动的解;而对有旋运动则只能从最原始的微分方程组出发,因此,研究涡旋运动还具有重要的理论意义。

本章研究涡旋的一般运动规律,全章内容分为三部分:第一,介绍涡旋运动的概念及描述涡旋的有关物理量;第二,讨论涡旋的运动学及动力学性质,揭示涡旋运动保持的条件及其产生、消亡及变化的规律;第三,通过涡量场求速度场并分析一些特殊的涡旋现象。

4.1 涡旋运动概念

4.1.1 涡旋运动描述

所谓涡旋运动指的是流体微团的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$,或速度场 $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ 的旋度(涡量) $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} \neq 0$,即存在一个涡量场 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t)$ 。前者是从质点的观点考虑,后者是从场的观点考虑,两者之间关系为 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}/2$ 。将 $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ 的流体运动称为有旋运动或涡旋运动,反之称为无旋运动。

在 2.5 节中曾经指出,判断流体运动是否有旋不能依流线或质点轨迹的弯直而定,而必须考虑它的涡量是否为零。例如,在平面点涡流场中, $v_r = 0, v_\theta = k/r$ (k 为常数),流体质点的迹线为同心圆,但除原点(奇点)外处处无旋,即流体微团不自旋

$\omega = 0$, 或涡量场 $\Omega_z = (\mathbf{V} \times \mathbf{V})_z \equiv 0$; 而在简单剪切流场中, $u = ky, v = w = 0$, 流体质点的迹线为直线, 流动却处处有旋, 即流体微团要做顺时针旋转, 或涡量场 $\Omega_z = -k \neq 0$ 。总之, 描述涡旋运动最基本的物理量是由速度分布决定的涡量, 即

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} \quad (4.1)$$

它是一个矢量场。在流体力学中对涡旋运动的分析, 往往也是对涡量场的分析, 在直角坐标系 (x, y, z) 中, 涡量可以表示为

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (4.2)$$

在柱坐标 (R, φ, z) 中, 有

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_R + \left(\frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial R} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(Rv_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z \quad (4.3)$$

在球坐标系 (r, θ, φ) 中, 有

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \quad (4.4)$$

常见的流体涡旋运动常常表现为不同的运动形式。例如, 剪切层或物面附近边界层中涡旋运动表现为层状涡(涡层), 而大气中的大尺度气旋、常见的澡盆涡等表现为柱状涡。

4.1.2 涡线、涡面和涡管

(1) 涡线

根据矢量场几何描述的一般形式, 可以用矢量线来描述涡量场 $\boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t)$, 这些矢量线就是涡线, 它是在某一时刻画的空间曲线, 该曲线上每一点切线方向与此时刻这一点的涡量方向重合。由于 $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}$, 所以涡线也可以看作流体微团的瞬时转动轴线, 就如同穿在一根铁丝上的一串旋转珠子, 如图 4.1 所示。

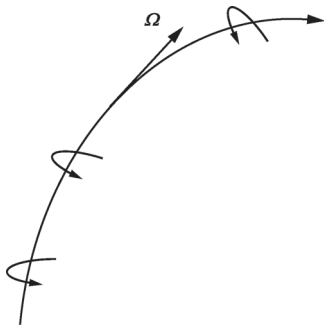


图 4.1 涡线

与流线微分方程类似, 涡线微分方程可表达为

$$d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (4.5)$$

式中, $d\mathbf{r}$ 为涡线切向矢量元。上式在直角坐标系中的具体形式为

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \quad (4.6)$$

通常, 涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 x, y, z, t 的函数, 所以涡线的形状在非定常流动时随时刻 t 变化, 而在定常流动中不随 t 变化。当给出速度 \mathbf{V} 时, 可求出涡量场 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, 利用涡线微分方程进行积分求出涡线。对空间积分时, 视参变量 t 为常数。

(2) 涡面和涡管

通过任一条非涡线曲线上所有点作涡线, 所组成的面称为涡面。显然, 在涡面上 $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$, 其中 \mathbf{n} 为涡面的外法向矢量。

任取一条封闭的非涡线曲线, 在同一时刻过该曲线的每一点作涡线, 则这些涡线形成的管状曲面称作涡管。在涡管上 $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

4.1.3 涡通量和速度环量

涡量描述的是流体旋转的局部性质。现在介绍描述流体旋转整体性质的物理量, 即涡通量和速度环量。

(1) 涡通量

如图 4.2 所示, 通过任一曲面 S 的涡量的通量定义为

$$J = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

式中, \mathbf{n} 为面元 dS 的外法线单位矢量, 式 (4.7) 描述了曲面 S 上各流体微团围绕法线旋转的总效果, 称为涡通量。

(2) 速度环量

某一时刻, 速度矢量沿有向闭合曲线 L 的积分为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (u dx + v dy + w dz) \quad (4.8)$$

式中, $d\mathbf{l}$ 为曲线 L 的切向元矢量, 式 (4.8) 描述了曲线 L 上各流体质点沿曲线回转的总倾向, 称为沿该曲线的速度环量, 又称环流。

必须注意, 速度环量 Γ 的符号与流速 \mathbf{V} 的方向及积分回线方向有关。当 $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} > 0$ 时, 说明该点的速度有沿曲线 $d\mathbf{l}$ 方向的分量, 即该点有沿曲线 $d\mathbf{l}$ 方向运动的趋势。若 $\Gamma \neq 0$, 则表明曲线上所有流体质点具有沿曲线 L 运动的总趋势。由于速度场 \mathbf{V} 在空间中连续分布, 对于曲线 L 张成的任意流体曲面也就具有旋转的趋势, 又可用速度环量来表征有限范围流体面在某一时刻总的旋转趋势。

因此, 可以按照所研究的对象: 流体质点或有限范围的流体面, 分别采用涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 及速度环量 Γ 来描述流体的涡旋运动。实际上, 它们又是密切关联的。根据速度旋度

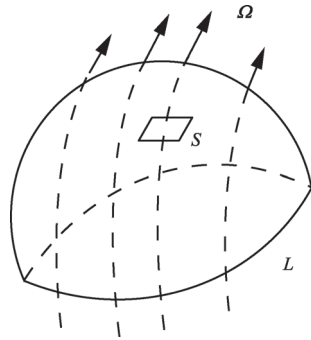


图 4.2 涡通量与速度环量

定义 $\Omega_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} / \Delta S$, 涡量在 \mathbf{n} 方向的分量, 就是该点处以此方向为法线面元上速度环量的面密度 $\Omega_n = d\Gamma/dS$ 。

对于一个有限曲面, 周线上的速度环量与内部各点的涡量之间有什么联系, 下面的斯托克斯定理回答了这一问题。

(3) 涡通量与速度环量的关系

根据斯托克斯公式, 通过任一曲面的涡通量等于绕其边界线的速度环量, 即

$$J = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma \quad (4.9)$$

式中, 法向 \mathbf{n} 与回线 L 正向的关系用右手法则确定。式(4.9)表明, 通过有限曲面的涡通量等于沿此曲面周界的速度环量。

涡量场还具有以下重要性质, 涡量场的散度等于零, 即 $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, 从而通过任意封闭曲面的涡通量为零, 即 $\oint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, 利用矢量分析中的高斯公式, 容易给出后者的证明。

4.2 涡旋运动学性质

4.2.1 亥姆霍兹第一定理

首先讨论涡旋运动的空间分布特性。由于涡量场是无源(无散)场, 它具有管形场的特性, 即在同一瞬时、同一涡管的不同截面处的涡通量相等, 这就是亥姆霍兹第一定理, 或称涡通量沿涡管不变定理, 其数学表达式为

$$\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{常数} \quad (4.10)$$

式中, 常数仅与时间 t 有关。下面简要证明之。

取一涡管, 如图 4.3 所示, 由 S_1, S_2 和 S_3 构成封闭曲面 σ , 其中 S_1, S_2 分别为涡管截面, S_3 为涡管侧面。根据涡量场性质: 通过封闭曲面的涡通量为零, 即

$$J = \oint_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

因涡管侧面 $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$, 故上式最后一项等于零; 又因 \mathbf{n} 为 σ 的外法向矢量, 对截面 S_1

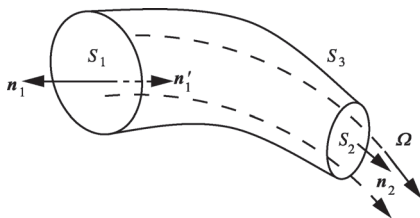


图 4.3 涡管强度

引进内法向矢量 $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}_1$, 则上式变为

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{n}'_1 dS$$

由于 S_1, S_2 为任取截面, 所以 $\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{常数}$, 于是定理得证。

正是由于在指定时刻, 通过给定涡管任一截面的涡通量是一常数, 因此, 它描述了该时刻该涡管内流体旋转的整体特性, 称为该涡管的涡管强度。

若涡管截面很小, 其上各点涡量近似均匀分布, 且取涡管截面与涡量方向垂直, 则定理近似写为 $\Omega_1 S_1 = \Omega_2 S_2$ 。可见, 对同一涡管, 截面积越小, 涡量及旋转角速度越大。

由亥姆霍兹第一定理, 可以得到如下重要推论: 涡管不能在流体内部产生或消失, 只能在流体中自行封闭成涡环, 或延伸至无穷远处。

若涡管在流体内部中止, 只有两种可能情形: 第一种是涡管截面积趋于无穷大, 其在物理上是不可能实现的; 第二种是涡管突然中断, 此时由涡管一端进来的涡量矢量无法从另一端出去, 这与涡量场是管形场相矛盾。这里指出, 涡管起止于自由面的情形包含在流体中涡管须封闭成环

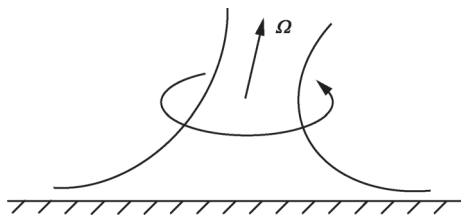


图 4.4 固壁附近的涡管

的情形中, 因为在自由面上方的另一种流体必定存在与自由面下方涡管相连的涡管。黏性流体在不旋转固壁附近的涡管如图 4.4 所示。

综上所述, 若不考虑现实中不存在的无穷远情形, 可以得出如下结论: 在任何流体中, 涡管形态只能是自行封闭成环, 即涡环。因此, 涡环的产生、演化、合并等动力学过程的研究具有实际的物理意义。

4.2.2 速度环量随体导数

考虑一条封闭曲线 L , 它不是由固定空间点组成的一条几何曲线, 而是由确定的流体质点组成的所谓“物质环线”。由于流体运动时环线上各质点的速度不同, 因此在下一时刻该物质环线的位置和形状都将发生变化, 根据流体的连续性, 可以证明, 这些确定的质点仍将组成一新的封闭物质环线, 且保持其相对位置不变。接下来要讨论的是沿物质环线的速度环量 Γ 对时刻 t 的导数, 又叫环流加速度。

首先建立速度环量的随体导数。沿物质环线速度环量的随体导数等于沿此物质环线的加速度环量, 或简言之, 环流的加速度等于加速度的环量, 即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.11)$$

显然,这是一个瞬时关系式,现证明之。

如图 4.5 所示, L 与 L' 是物质环线在两个不同时刻 t 和 $t + \Delta t$ 的位置,原来相距 δl 的两邻近点 A 和 B ,在下一时刻分别运动至 A' 和 B' 。图中 d 表示对时间的微分, δ 表示对空间的微分。物质环线上速度环量对时间的随体导数,可写为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{l})$$

考虑右端第二项,由图 4.5 可知,

$$\mathbf{v}dt + \delta\mathbf{l} + d(\delta\mathbf{l}) = \delta\mathbf{l} + (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})dt$$

从而有

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{l}) = \delta\mathbf{v}$$

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{l}) = \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \oint_L \delta \left(\frac{V^2}{2} \right) \equiv 0$$

再将 $\delta\mathbf{l}$ 改记为 $d\mathbf{l}$,得证。

以上是从运动学角度阐明环流加速度与加速度环量之间的联系,仅从连续性假设为前提出发,而与流体的性质(如黏性、压缩性)以及作用在流体上力的性质无关。除了关于涡管形态的讨论以外,本节的结论属于流体运动学,故对于理想流体和黏性流体都适用。

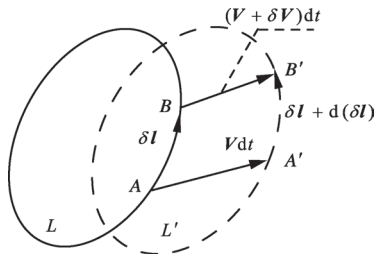


图 4.5 速度环量的随体导数

4.3 涡旋动力学性质

本节讨论涡旋运动生消变化的动力学规律,与流体的性质和作用力性质有关。常用的研究方法有两种,一是以流体质点为研究对象,从涡量方程入手进行讨论;二是先研究一个有限范围的流体块,从速度环量入手讨论其守恒变化规律,进而分析各处涡旋的运动性质。这里着重介绍后一种方法。下面分别讨论涡旋运动的守恒与生消变化规律。

4.3.1 涡旋守恒性

所谓涡旋的守恒是指涡旋这种性质的保持性,不是指各点涡量是否发生变化。下面讨论在什么条件下涡旋运动是守恒的,以及应遵循的原则,重点讨论开尔文环量守恒定理,以及它的几个重要推论:拉格朗日定理和亥姆霍兹第二、第三定理。

(1) 开尔文定理(又称速度环量守恒定理)

它回答在什么条件下,沿物质环线的速度环量不随时间变化,即 $d\Gamma/dt=0$ 。

从速度环量的随体导数出发,利用动量方程,将加速度与力联系起来。将理想流体的动量方程(3.9)代入速度环量随体导数关系式(4.11),得

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \oint_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} \quad (4.12)$$

此式表明,速度环量变化的原因是由于存在各种力的环量。上式右端第一项为质量力的环量,第二项为气压梯度力的环量。若考虑流体的黏性,还应有第三项黏性力的环量(黏性力为 $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$,对应环量为 $\oint_L \nu \nabla^2 \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$)。如果这三种力的环量为零,则速度环量 Γ 保持不变。

首先考虑理想(无黏)流体,故不存在黏性力环量。其次,若质量力有势(无旋),则存在力势函数 U ,使得 $\mathbf{F} = -\nabla U$,此时质量力沿封闭曲线的环量为零,即

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \nabla U \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L dU = 0$$

最后,若流体正压,则气压梯度力无旋(有势),即存在正压函数 $P = \int dp/\rho$,使 $-\nabla p/\rho = -\nabla P$ 。由此,气压梯度力沿封闭曲线的环量亦为零,即

$$-\oint_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \nabla P \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L dP = 0$$

由此可见,黏性、斜压及质量力无势是引起速度环量发生变化的三大因素。当这些因素都不存在时,则速度环量保持不变,即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

这就是著名的开尔文定理,又称速度环量守恒定理。它表明,理想正压流体在有势质量力的作用下,沿流体内任一封闭物质环线的速度环量不随时间改变。

下面从开尔文定理出发,研究环线内部涡旋运动的守恒性。

(2)拉格朗日定理(又称速度势存在定理)

理想正压流体在有势质量力作用下,若某一时刻流体的某一部分无旋(存在速度势),则在这以前或以后的任何时刻,该部分流体也无旋(仍存在速度势)。

现利用斯托克斯公式进行推证。

设某时刻 t ,无旋流体中物质环线为 L ,所张物质面为 S 。利用斯托克斯公式,得

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

在之前或之后的另一时刻 t' ,根据流体介质的连续性,组成物质环线 L ,也即物质面 S 的流体质点,必相应组成物质环线 L' 及物质面 S' (张于 L' 上),由开尔文速度环量守恒定理,在理想、正压和质量力有势三个条件下,沿物质环线的速度环量保持不变,即

在 t' 时刻

$$\Gamma' = \oint_{L'} \mathbf{V}' \cdot d\mathbf{l}' = - \int_{S'} \boldsymbol{\Omega}' \cdot d\mathbf{S}' = 0$$

由于物质环线及其上所张物质面为任意取之,欲使上述面积分等于零,必对每个小面元都有

$$\boldsymbol{\Omega}' \cdot d\mathbf{S}' = \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

这只有两种可能:一是各处涡量方向与面元方向垂直,即 $\boldsymbol{\Omega}' \perp \mathbf{n}'$;二是各处涡量为零,即 $\boldsymbol{\Omega}' = 0$ 。由于面元可以任取,故前一种可能性不存在,结论只能是后者,即各点无旋,于是定理得证。

由拉格朗日定理还可得到如下结论:当满足定理条件,若在某时刻某一部分流体有旋,则在之前或之后任何时刻这部分流体亦有旋。将此部分内容直接并入拉格朗日定理,统称涡旋不生不变定理。它表明,在理想、正压和质量力有势三个条件下,无旋运动则永远无旋,有旋运动则永远有旋。即涡旋(或无旋)运动具有保持性。当研究范围缩小到一个流体质点时便可得出结论:满足定理条件时,无旋运动中的流体质点不可能获得涡量,涡旋运动中的流体质点也不会失去涡量。应当指出,涡旋守恒并不意味着涡旋运动中各流体质点的涡量大小方向不改变,而仅强调涡旋的保持性。

(3)亥姆霍兹第二、第三定理(又称涡线、涡管和涡管强度保持不变定理)

理想正压流体在有势质量力的作用下,涡线、涡管守恒(亥姆霍兹第二定理),涡管强度守恒(亥姆霍兹第三定理)。

所谓涡线守恒指的是物质点的守恒(保持性)。即某时刻在一根涡线上的诸物质点,在之前或之后的各个时刻,仍构成一根涡线;或者说,涡线在空间中与构成它的物质点一起移动,好像物质点与涡线“冻结”在一起,这就是涡线守恒。涡管守恒的含义与之类似。下面首先证明涡管守恒。

在涡管表面上任取一由流体质点组成的封闭曲线 C ,因涡量 $\boldsymbol{\Omega}_n$ 在涡管表面处处为零,由速度环量与涡通量的关系,沿 C 的速度环量为

$$\Gamma_C = \int_S \boldsymbol{\Omega}_n \cdot d\mathbf{S} = 0$$

式中, S 为以闭曲线 C 为周界的涡管表面。再由开尔文定理,在满足无黏、正压和质量力有势三个条件时, Γ_C 不随时间而变,在任一时刻均为零,从而可知通过 S 的 $\boldsymbol{\Omega}_n$ 在任一瞬时均为零,因 S 为任意取之,所以涡管表面的流体质点永远构成涡管表面,即涡管守恒。

由于涡线是两个涡管的交线,所以可推知涡线守恒。另一方面,由于涡线可以看作涡管截面收缩为点的极限情形,亦可推知涡线守恒。

上面求证了亥姆霍兹第二定理,又称涡线涡管保持定理。下面证明亥姆霍兹第三定理:在前述条件下,涡管强度在运动中保持不变,因此又称涡管强度保持定理。

用一闭合流体线 C 包围涡管, 由开尔文定理 $d\Gamma/dt = 0$, 根据涡通量与速度环量关系, $J = \Gamma = \text{常数}$, 即涡管强度保持不变。顺便指出, 由确定流体质点组成的涡管, 在不同时刻有不同的形状和截面积, 但涡通量保持不变。显然对截面上某一确定的流体质点来说, 涡量的大小和方向是可以发生变化的。

上面论证了在理想、正压和质量力有势三个条件下, 涡旋守恒的三个主要定理。这些定理全面描述了涡旋守恒的规律。对大范围流体面, 有沿物质环线环量的守恒性; 对物质点, 涡旋以及无旋运动有保持性。

4.3.2 涡旋产生、发展和消亡

涡旋的守恒是以理想、正压和质量力有势这三个条件为前提, 当其中任一条件不满足时, 涡旋守恒将被破坏, 涡旋运动便可产生或消失。所以, 黏性、斜压及外力无势就是产生涡旋运动的三个重要因素。由于实际流体都是黏性流体, 所以在实际生活中常常看到涡旋不守恒的例子, 例如划船时会产生涡旋, 它又会随时间慢慢消失。下面分别介绍三种因素对涡旋生消变化的作用规律。

(1) 黏性流体中涡旋的产生与扩散

对于黏度系数为常数的不可压缩均匀流体绕物体流动的情形, 若外力有势, 则物面是唯一的涡量源。形象地说, 在不可压缩黏流中固壁附近的涡量是“搓”出来的。

首先说明为什么在不可压缩黏流中涡量必定会在物面处产生。设在 $t=t_0$ 时刻流场无旋, 可用速度势的拉普拉斯方程求解流场, 但仅需物面法向速度即可唯一地确定无旋解。因此, 一般地, 壁面处的黏附条件必然要被破坏, 结果在物面上形成非零相对切向速度。此时, 必然会在物面上产生刚好足够的涡量, 使其诱导的速度场与无旋解一起使得切向速度等于零, 从而保证黏附条件的满足。同时由于黏性, 将产生的涡量通过对流、扩散传输到流体内部。有关涡旋扩散现象将在后面章节中详细讨论。

其次, 定义物面涡量源强度为

$$\sigma = -\nu \frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad (\text{在固壁边界面上}) \quad (4.13)$$

式中, 负号代表沿物面外法向, 离开物面时 $|\Omega|$ 将减小, 其最大值发生在物面上。

最后, 以平面固壁为例, 考察涡量从物面上产生的机制。在平板上, 如图 4.6 所示, 由上述定义, 有

$$\sigma_x = -\nu \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = -\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nu \nabla^2 v$$

因为当 $z = 0$ 时, 物面上 u, v, w 均为零, 它们对 x, y 的偏导数也等于零。由涡量场是无散场的条件, 可知 $\partial w / \partial z = 0$ 。另一方面, 在固壁上动量对流效应不存在, $d\mathbf{V}/dt = 0$, 若不计质量力 \mathbf{F} , 则在固壁处黏性扩散力必须与气压梯度力相平衡(根据第 6 章不

可压缩黏流的 N-S 方程), 即 $\nu \nabla^2 \mathbf{V} = \nabla p / \rho$, 将其代入 σ_x 的表达式, 得

$$\sigma_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.14)$$

上式表明, 在平面固壁处产生的涡量其大小取决于壁面附近沿流向的压强梯度值, 而产生出的涡量将平行于平板向流体内部扩散。

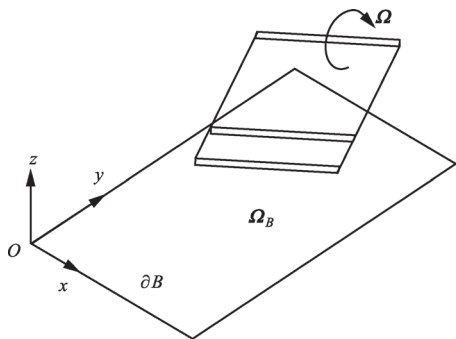


图 4.6 壁面涡旋扩散

(2) 斜压流体中涡旋的产生

① 斜压流体(压容力管)

在 3.4 节中指出, 若某一时刻流体的密度仅仅是压强的函数 $\rho = \rho(p)$, 则称此流体为正压流体。引入比容 $\alpha = 1/\rho$, 对正压流体, 压强 p 和比容 α (或密度 ρ) 的空间分布特点是: 等压面 ($p = \text{常数}$) 和等比容面 ($\alpha = \text{常数}$ 或等密度面 $\rho = \text{常数}$) 一定重合, 如图 4.7 所示。斜压流体即非正压流体, 在某时刻比容 α (或密度 ρ) 不仅是压强 p 的函数, 而且还与温度等其他物理量有关。例如完全气体物态方程 $\rho = \rho(p, T)$ 。此时等压面与等比容面空间分布彼此不重合, 而是相互交割成空间网格或“管子”形状, 如图 4.8 所示, 称为压容力管(又称力管)。显然, 说“流体斜压”与“存在力管”是等价的。

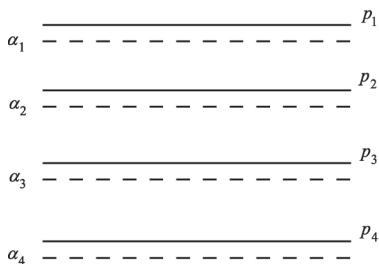


图 4.7 正压流体

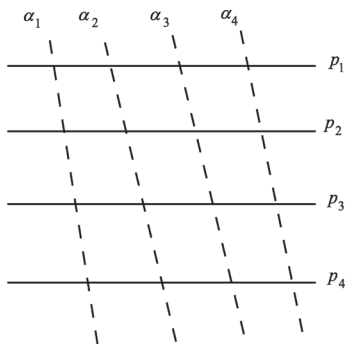


图 4.8 斜压流体(压容力管)

②皮叶克尼斯定理

对正压流体 $\rho = \rho(p)$, 引入正压函数 $P(p) = \int dp/\rho(p)$, 则气压梯度力有势 $-\nabla p/\rho = -\nabla P$ 。然而, 对斜压流体 $\rho = \rho(p, T)$ 情况则不同, 其气压梯度力无势, 沿封闭回线的环量不为零, 即 $-\oint_L (\nabla p/\rho) \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 。

现在仅考虑流体的斜压对速度环量变化的作用, 则有

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \alpha dp \quad (4.15)$$

利用斯托克斯公式, 将沿封闭曲线的线积分化为在所张曲面的面积分, 于是

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S [\nabla \alpha \times (-\nabla p)] \cdot d\mathbf{S} \quad (4.16)$$

式(4.16)称为皮叶克尼斯定理, 它表明斜压性对速度环量变化的贡献。这是一个瞬时关系式, 在某一时刻只要给出斜压状态, 即压强 p 及比容 α 的空间分布, 便可计算出该时刻沿 L 速度环量的随体导数。

利用压容力管可形象地表示斜压状态, 并赋予皮叶克尼斯定理以直观的物理解释。

在所研究的空问范围内, 根据某时刻的 $p-\alpha$ 空间分布, 分别画出 p 和 α 的等值面, 交割成压容力管, 取相邻等 p 面间相差一个压强单位, 相邻等 α 面间相差一个比容单位, 这样构成的力管称为单位压容力管, 如图 4.9 所示。由此, 气压梯度力沿总

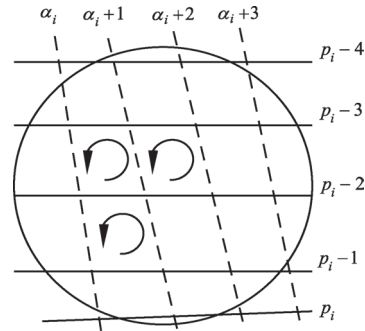


图 4.9 压容力管

周线 L 的环量(线积分), 可表示为沿诸单位力管边界周线的环量(线积分)之和, 即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \alpha dp \approx \sum_{i=1}^N \oint_{l_i} \alpha dp \quad (4.17)$$

式中, N 是 L 内所包含的单位力管总数。于是问题归结为求每个单位力管周界上的线积分 $-\oint_{l_i} \alpha dp$ 。

任取一个单位力管, 设 $p-\alpha$ 空间配置如图 4.10 所示, 从 $\nabla \alpha$ 沿较小角度转向 $-\nabla p$ 时, 转动方向为逆时针方向, 恰与周线的正方向一致。由此可计算出沿 l_i 的环流为

$$-\oint_{l_i} \alpha dp = -\{(\alpha_i + 1)[p_i - (p_i + 1)] + \alpha_i(p_i + 1 - p_i)\} = +1$$

上式表明, 该单位力管对环量随体导数 $d\Gamma/dt$ 的贡献是 $+1$, 使 $d\Gamma/dt > 0$, 若规定逆

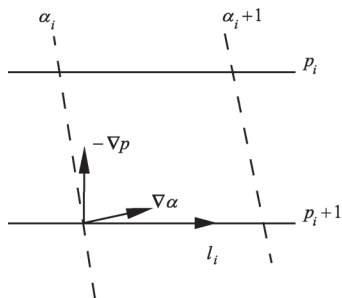


图 4.10 正单位力管

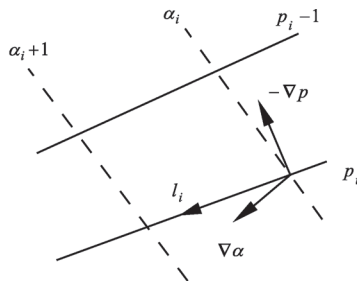


图 4.11 负单位力管

时针环量为正,则它表示沿逆时针速度环量有增大的趋势,这种单位力管称为正单位力管。

如果改变 $p-\alpha$ 空间配置,如图 4.11 所示,从 $\nabla\alpha$ 沿较小角度转向 $-\nabla p$ 的转动方向不是逆时针,而是顺时针(与周线 l_i 的正方向相反)。则沿 l_i 的线积分为

$$-\oint_{l_i} \alpha dp = -\{\alpha_i[p_i - (p_i + 1)] + (\alpha_i + 1)(p_i + 1 - p_i)\} = -1$$

此单位力管对速度环量变化的贡献为 -1 ,使 $d\Gamma/dt < 0$,即速度环量有朝顺时针方向增加的趋势,这种力管称为负单位力管。

由上面分析可以看出,不论是正单位力管还是负单位力管,速度环量变化的方向与 $\nabla\alpha$ 向 $-\nabla p$ 的转动方向相一致。总之,不管 $p-\alpha$ 关系如何配置, $\nabla\alpha$ 向 $-\nabla p$ 的转向只有两种可能,即逆时针或顺时针,因而单位力管的性质不是正就是负,它对 $d\Gamma/dt$ 的贡献非 $+1$ 即 -1 。所以沿诸单位力管的线积分之总和为

$$\frac{d\Gamma}{dt} \approx \sum_{i=1}^N \oint_{l_i} \alpha dp = N_+ - N_- \quad (4.18)$$

式中, N_+ 与 N_- 分别表示总单位力管中正力管与负力管的数目。

皮叶克尼斯定理的另一种表述:理想斜压流体在有势质量力的作用下,沿流体中任一封闭环线速度环量的随体导数等于包围在该环线内正、负单位压容力管数目之代数和。

以上表述法与面积分表达式(4.16)完全等价。实际上, $[\nabla\alpha \times (-\nabla p)] \cdot d\mathbf{S}$ 就是面元 $d\mathbf{S}$ 上的单位力管数目。如果 $p-\alpha$ 配置从 $\nabla\alpha$ 转向 $-\nabla p$ 为逆时针方向,则 $\nabla\alpha \times (-\nabla p)$ 方向与面元 $d\mathbf{S}$ 方向一致(或夹角小于 90°), $[\nabla\alpha \times (-\nabla p)] \cdot d\mathbf{S} > 0$,对 $d\Gamma/dt$ 的贡献为正,使速度环量朝逆时针方向增加(与 $\nabla\alpha$ 转向 $-\nabla p$ 方向一致);反之,若 $\nabla\alpha$ 转向 $-\nabla p$ 为顺时针方向,则速度环量变化方向也是顺时针,即速度环量变化方向总是与 $p-\alpha$ 配置中 $\nabla\alpha$ 转向 $-\nabla p$ 的方向一致。这些结论与前述对单位力管的分析是一致的。

为什么斜压会引起速度环量变化?力管的存在是速度环量变化的动力原因,其本

质是因为沿周界 L 存在气压梯度力环量,使流体质点具有沿切线方向加速运动的趋势。为便于理解,研究一个矩形截面的单位力管(等 α 线与等 p 线正交)所包围的流体小方块。显然,在它的两条等 α 线(侧边)上,不仅气压梯度力 $(-\alpha dp)$ 的环量大小不相等,而且气压梯度力 $(-\nabla p/\rho)$ 本身大小也不相等(与 α 成正比);或者说,气压梯度力沿等 p 线呈切变分布。由此流块便受到一个总的合力矩作用,产生加速度的旋转,周线上的速度环量将发生变化。特别指出,力环量是某一时刻空间力场分布的曲线积分,它并不是力矩也不是力所做的功。环流加速度与力环量之间的关系,并不是功能关系。当然,就速度环量变化的过程而言,会伴有能量形式的转换。例如,当速度环量增大,有其他形式的能量通过气压梯度力做功转换为流体环流运动的动能。由于这种做功本领与流体的斜压性有关,故有时俗称斜压能。

某一时刻斜压状态引起的速度环量变化能否一直继续下去?分析一个单位力管会发现,速度环量变化的趋势总是使较轻的流体(ρ 小或 α 大)由高压流向低压,较重的流体则由低压流向高压,流动的结果,将使等比容面趋于与等压面平行(重合),即力管趋于消失,速度环量将不发生变化。这样,斜压力管的存在造成了速度环量的变化,而速度环量变化后又反过来破坏力管,使流场趋于正压性。由此表明,流体斜压性本身就包含着消灭它自己的内在因素,并使其自身向对立面转化。

利用皮叶克尼斯定理,可以方便地由斜压性的分析定性判断速度环量的变化趋势。作为一般例子,以下分析因地面加热不均匀形成斜压引起速度环量变化的情形,如图 4.12 所示。

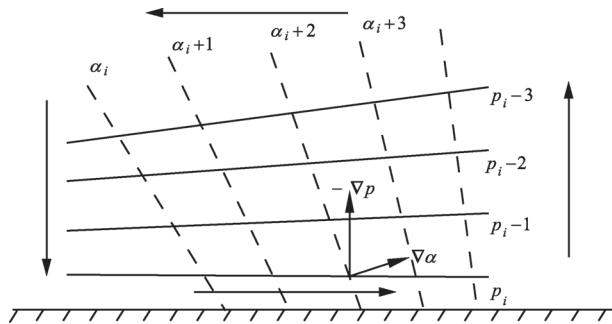


图 4.12 地面加热不均匀导致速度环量变化

首先解释,为什么之前正压分布的大气,当地面加热不均匀时会变为斜压。先分析等 p 面变化,根据静力学平衡方程 $\nabla p = -\rho g \mathbf{k} = -(g/\alpha) \mathbf{k}$ 可知,暖区 α 要增大(受热膨胀),压强梯度值减小,等压面要变稀,而冷区情况则相反,这使等 p 面要向冷区倾斜。再分析等 α 面变化,利用状态方程 $p\alpha = RT$,考察同一等压面上处于冷、暖地区的两个点,显然暖区的 α 值大些,考虑到沿铅直方向 α 随高度而增大,因此,等 α 面将

从暖区向冷区上空翘起,或者说,等 α 面向暖区倾斜,这样等 p 面与等 α 面不再重合,而是互相交割形成力管,大气由正压变成斜压。画出 $\nabla\alpha$ 与 $-\nabla p$ 的指向,很容易利用皮叶克尼斯定理决定此时速度环量的变化率。事实上,若本来空气静止,则要产生环流(暖区上升,冷区下沉)。或者从涡旋运动来说,原本静止时为无旋,现在产生环流,内部必有流体质点产生不为零的涡量,这就是斜压性产生的涡旋运动。

下面应用上述方法分析一些具体实例。

信风(贸易风)

如图 4.13 所示,由于地面温度分布不均匀,对北半球,赤道地区为“暖区”,而北极地区为“冷区”。这样,等 p 面与等 α 面互相交割构成力管,产生如图所示的逆时针环流:在近地面空气由北向南流动,在赤道地区上升,在高空流回北极,然后下沉。这就形成赤道国家出现的贸易风。

海陆风

白天陆地受热大于海洋,等 α 面向海洋翘起,近地面出现海风,如图 4.14 所示。晚间则相反,出现陆风。

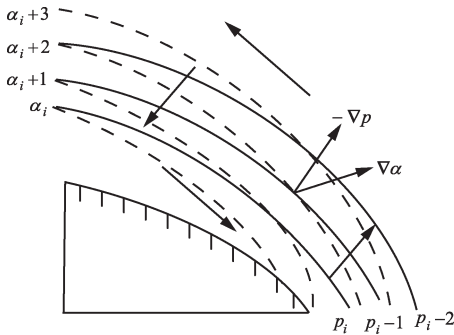


图 4.13 信风(贸易风)

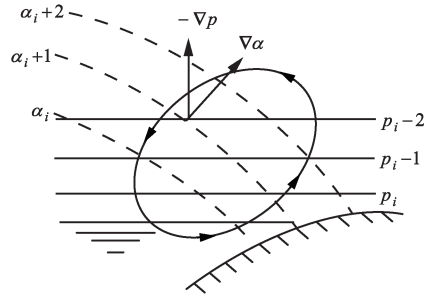


图 4.14 海风

山谷风

白天山坡受热较大,等 α 面向谷地翘起,出现谷风,晚间则相反,出现山风,如图 4.15 所示。

另外,海流也是如此,当压强和温度相同时,盐度较大的海水则密度也较大,因此,若含盐度不同的海水相遇,可出现等压面(近似水平面)与等比容面相交的情况,这时将形成环流,盐度较大的水向下流,而盐度较小的水向上流,如图 4.16 所示。

(3)外力无势时涡旋的产生

转动参考系中的科里奥利力是一种常见的无势力,现在研究它对涡旋产生的作用。在旋转地球上分析大气的相对运动,需引进两种惯性力,即惯性离心力 $f_r = \omega^2 R = \nabla(\omega^2 R^2/2)$ 和科里奥利力(简称“科氏力”) $f_k = -2\omega \times \mathbf{V}$,前者为有势力,后者为无势

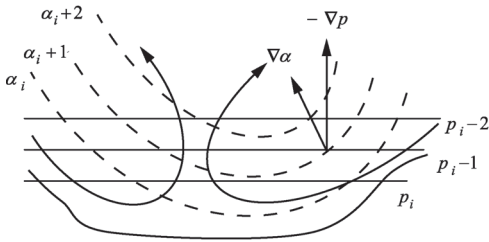


图 4.15 山风

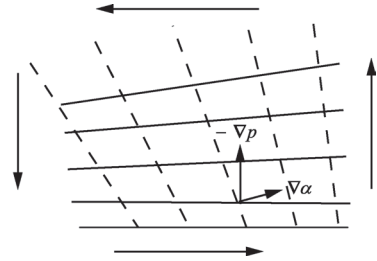


图 4.16 含盐度不同产生的环流

力。其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是地球自转角速度, \mathbf{R} 是地轴到流体质点的径向矢量, \mathbf{V} 是流体质点相对地球的速度。重力是引力和惯性离心力的合力。现在假设大气无黏、斜压, 考虑到重力有势 $\mathbf{g} = -\nabla U$, 则动量方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_k = -\nabla U - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

因此, 环流变化率为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla \alpha \times (-\nabla p)] \cdot d\mathbf{S} - 2 \oint_L (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.19)$$

上式右边第一项为斜压性对速度环量变化的作用; 第二项正是要讨论的科里奥利力的环量, 这里不妨采用几何的方法讨论。

由矢量运算法知: $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{V} \times d\mathbf{l})$ 。在几何上, 它表示由 $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{V} 及 $d\mathbf{l}$ 这三个量构成的平行六面体的体积, 其符号的正负取决于这三个矢量的相互位置关系, 如果把 $\boldsymbol{\omega}$ 看作该平行六面体的高, 则其体积就等于 $\boldsymbol{\omega}$ 乘以与 $\boldsymbol{\omega}$ 相垂直的横截面积。考虑到这里的 $\boldsymbol{\omega}$ 沿地轴方向, 横截面与赤道平面平行, 横截面积就是由 \mathbf{V} 与 $d\mathbf{l}$ 在赤道平面内的投影构成的小平行四边形面积。原先的物质环线 L 在赤道平面内的投影为 L' , 它所包围的面积为 S' 。当流体运动时, 物质环线变形, S' 发生变化。 $\oint_{L'} \mathbf{V} \times d\mathbf{l}$ 的大小表示整个物质环线 L 运动时, 它在赤道平面内的投影面积 S' 的时变率 dS'/dt , 于是有

$$\oint_L (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L'} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{V} \times d\mathbf{l}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \oint_{L'} (\mathbf{V} \times d\mathbf{l}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{dS'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \frac{dS'}{dt}$$

这里已考虑 $\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量, 并且 S' 的正向与 $\boldsymbol{\omega}$ 相同。这样, 斜压与科氏力引起环流变化的总效应可写为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N_+ - N_- - 2\boldsymbol{\omega} \frac{dS'}{dt} \quad (4.20)$$

因此, 除了力管要引起环流变化外, 物质环线在赤道平面内的面积变化也将引起环流变化。

反过来考虑前面提到的贸易风。在北半球取一个近于纬圈的物质环线, 由于近地面空气从北向南运动, 该物质环线在赤道平面内的投影要增大, 产生对 $d\Gamma/dt$ 的负

贡献,即从北极看要产生顺时针环流。结果,贸易风不是严格地从北向南吹,而是自东北向西南吹。实际上就是科氏力使来自北向南的运动偏向右侧,这是与实际观测相符合的。

前面是从速度环量入手研究流体的涡旋运动。下面简单介绍如何直接从涡量方程入手研究涡旋运动。对兰勃方程两端取旋度,得

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \nabla \times \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) = \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)$$

因为
$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (\text{因 } (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{V} \equiv 0)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \alpha \times \nabla p$$

从而有

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \alpha \times (-\nabla p) \quad (4.21)$$

这就是理想流体的涡量方程(黏性流体涡量方程多一项 $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$, 见第6章)。

涡量方程是研究涡旋动力学的基本方程,它反映了涡旋变化的基本规律,方程(4.21)右端就是各种力的旋度,包括质量力的旋度和气压梯度力的旋度,对黏性流体还有黏性力的旋度。因此,黏性、斜压、质量力无势就是涡旋变化的三个动力学原因。当它们都不存在时(即理想正压流体、质量力有势),得

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{简记为} \quad \text{Helm}\boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (4.22)$$

上式又称为亥姆霍兹方程。数学上可以证明,任一矢量场 \mathbf{a} , 只要满足 $\text{Helm}\mathbf{a} = 0$, 其矢量线、矢量管以及矢量管强度必守恒,因此,由亥姆霍兹方程可直接得到亥姆霍兹涡旋守恒定理(第二及第三定理)。从亥姆霍兹方程再次验证,所谓涡旋守恒,即 $\text{Helm}\boldsymbol{\Omega} = 0$ 并不意味着 $d\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$ 或 $\partial\boldsymbol{\Omega}/\partial t = 0$ 。

4.4 涡量场确定速度场

涡量场和速度场从不同侧面反映了流体的空间运动特性,两者是紧密联系的。已知速度场,通过空间微分可得到涡量场;反过来,已知涡量场,也可通过逆运算(积分)求得相应的速度场。散度场与速度场也有类似的关系。在实际中常常遇到由涡量场决定速度场的问题,例如大气中出现的旋风将使周围的流动怎样变化,机翼理论中涡旋的分布如何影响绕流特性等。下面介绍如何由涡量场及散度场决定速度场。先考

虑有散无旋及有旋无散的简单情形,然后再讨论同时有速度、散度及涡量的一般情形。

4.4.1 无旋有散和无散有旋速度场

(1) 无旋有散场速度场

已知 $\nabla \times \mathbf{V} = 0, \nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta$, 求速度场 \mathbf{V} 。

因为无旋, 可引进速度势 $\phi (\mathbf{V} = \nabla \phi)$, 并将 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta$ 改写为

$$\nabla^2 \phi = \Theta$$

由此求解速度场 \mathbf{V} 的问题, 归结为由泊松方程求解 ϕ 的问题, 得到 ϕ 后即可由 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 求出速度 \mathbf{V} 。

(2) 无散有旋场速度场

已知 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \times \mathbf{V} = \Omega$, 求速度场 \mathbf{V} 。

对于平面流场, 可由无散引进流函数 ϕ , 由旋度表达式得 ϕ 的泊松方程为

$$\nabla^2 \phi = -\Omega_z$$

由此解出 ϕ , 就可得到平面流场 \mathbf{V} 。

对一般空间流场, 可用类似方法, 因为 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$, 引进矢量势 \mathbf{A} , 使之满足 $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$, 由此将求 \mathbf{V} 的问题转化为求 \mathbf{A} 的问题, 利用旋度表达式得到 \mathbf{A} 满足的方程, 即

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \Omega \quad \text{或} \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \Omega$$

由于满足此方程的 \mathbf{A} 有很多, 可以不失一般性地选择满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的 \mathbf{A} 作为解, 这种解可以证明总是存在的。因为若有 \mathbf{A}_1 是方程的解 ($\nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{V}$), 但 $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 \neq 0$, 总有一个标量函数 f , 使 $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = \nabla^2 f$, 此时取 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \nabla f$, 则 \mathbf{A}_2 即满足 $\nabla \times \mathbf{A}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{V}$, 又满足 $\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla^2 f = 0$, 所以 \mathbf{A}_2 是所要找的解。因此同时满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的解 \mathbf{A} 满足泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\Omega$$

求出 \mathbf{A} , 就可得到速度场 $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。

(3) 求解泊松方程

综上所述, 问题归结为求解泊松方程。例如已知散度场, 泊松方程 $\nabla^2 \phi = \Theta$ 的解为

$$\phi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta, t)}{r} d\tau \quad (4.23)$$

若流场随时间变化, 则 t 为参变量, 这是一个瞬时关系式。 x, y, z 是场点坐标, ξ, η, ζ 是源点坐标, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ 是源点到场点的距离, 如图 4.17 所示, 体积分是对源点分布区域 τ 进行的。下面推导该式。

先求空间点源对应流场的速度势。若点源单位时间体积流量为 Q , 由于对称性向

外流且不可压,故距离 r 处的径向速度为 $v_r = Q/(4\pi r^2)$,由此求得速度势为

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \int v_r dr = -\frac{Q}{4\pi r}$$

现在把散度场中某点 $M(\xi, \eta, \zeta)$ 处的小块 $d\tau$ 视作空间点源,则其向外的体积流量为 $Q = \Theta d\tau$ (因散度 Θ 是相对体积发散率),它引起的流场速度势为 $-\Theta d\tau/(4\pi r)$,整个有散区域 τ 引起的流场速度势即为式(4.23)。实际上, $\nabla^2 \phi = \Theta$ 与式(4.23)都是反映 ϕ 与 Θ 的关系式,前者为微分关系,后者为积分关系。

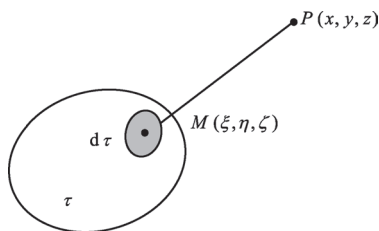


图 4.17 源点与场点

同理,对于旋度场,泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\Omega}$ 有解

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t)}{r} d\tau$$

这是同时满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的一个特解。可以证明, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的条件要求在 $\boldsymbol{\Omega}$ 区域 τ 的边界上,涡量的法向分量处处为零,否则,对解要进行修正。

4.4.2 有散有旋速度场

设在有限体积 τ 内给定散度场和涡量场,即 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta$ 和 $\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}$,求速度场 \mathbf{V} 。

因问题是线性的,令 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$,其中 \mathbf{V}_1 是有散无旋部分,即 $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \Theta$ 和 $\nabla \times \mathbf{V}_1 = 0$; \mathbf{V}_2 是有旋无散部分,即 $\nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\Omega}$ 。于是直接用前面的结果,分别求出 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 ,叠加得

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Theta}{r} d\tau \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau \right)$$

4.4.3 线涡(涡丝)诱导速度场(毕奥-沙伐尔公式)

若孤立涡管的截面无限缩小,就转化为一根涡丝 l 。取一段微元涡丝 $d\mathbf{l}$ (方向与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相同),设截面积为 dS ,微元体积为 $d\tau$,则 $\boldsymbol{\Omega} d\tau = \boldsymbol{\Omega} dS \cdot d\mathbf{l} = \Gamma d\mathbf{l}$ 。涡管强度 Γ 即为涡丝强度,这样,矢量势和速度场可分别表示为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{\Omega} d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\Gamma d\mathbf{l}}{r} \quad \text{和} \quad \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_l \frac{\Gamma d\mathbf{l}}{r}$$

此处, Γ 为常量。由于旋度运算是场点坐标 (x, y, z) 微分,而涡丝 $d\mathbf{l}$ 处是源点,其坐标为 (ξ, η, ζ) ,见图 4.18, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$,故速度场写为

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{l} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3}$$

上式为曲线涡丝 l 在场点 $P(x, y, z)$ 所诱导的速度。微元涡丝 $d\mathbf{l}$ 所诱导的速度为

$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.24)$$

其大小为 $dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin\alpha dl}{r^2}$ 。这就是著名的毕奥-沙伐尔(Biot-Savart)公式。

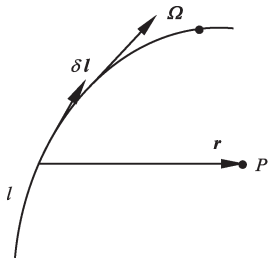


图 4.18 涡丝

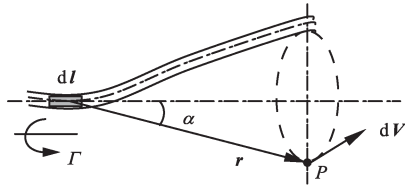


图 4.19 毕奥-沙伐尔公式

必须强调,上述公式的意义是当流体中存在涡旋时,通过黏性作用,它会引起周围流体的运动,在运动得到稳定之前黏性起主要作用;达到稳定后,黏性作用可以略去,这时可以将流体作为理想流体来处理。从图 4.19 可以看到,涡丝上一段微元所诱导的流动是以该微元段的延长线为轴线的圆周运动,其转动方向与该微元段的角速度方向相同,并称涡丝引起的流体速度为诱导速度。

如果考虑一根无限长的直涡丝,设所求场点到涡丝的垂直距离为 r ,则对式(4.24)积分得到此涡丝诱导的速度为

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

其实,它就是平面问题中点涡产生的平面流场,其在平面上速度分布的极坐标形式为 $v_r = 0, v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$ 。容易验证,这是无旋运动。根据 2.6.3 节,点涡的速度势 ϕ 和流函数 ψ 分别为

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

其等势线 $\theta = \text{常数}$ 是一族通过原点的射线,而等流函数线 $r = \text{常数}$ 是一族以原点为中心的同心圆,两族曲线彼此正交。

以上分析表明:① 涡丝本身是有旋的,但其诱导的速度场却是无旋的;② 涡丝诱导的流场可以划分为两部分,即中心旋度区,它是涡丝本身(如龙卷、台风的核心),其特点是流速与半径呈正比,且 $\Omega \neq 0$,第二部分是外围无旋区,即诱导速度区,其特点是流速与半径成反比。

4.5 兰金组合涡

本节通过对平面上不可压缩理想流体中一半径为 r_0 的圆形涡旋进行分析, 希望达到如下目的: 第一, 理解涡旋的一些重要性质; 第二, 进一步说明伯努利积分和拉格朗日积分的应用范围, 以及当两种积分均不适用时, 如何通过直接积分欧拉方程求压强分布。

在本节圆形涡旋模型中, 圆形内部流体以匀角速度 ω 绕中心轴旋转, 即圆形内流体各点量为均匀常值 $\Omega = 2\omega$, 其速度环量为 $\Gamma = 2\pi\omega r_0^2$; 圆形外部流体做无旋圆运动 ($\Omega = 0$)。这种涡旋称为兰金组合涡, 中央部分像刚体旋转的流体叫作涡核。下面研究此涡核外部和内部的速度场及压强场。

4.5.1 涡核外部速度和压强分布

在涡核外部, 流体做无旋圆运动, 根据 4.4.3 节对涡丝的讨论, 其速度分布为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (r > r_0)$$

因涡核外流动无旋, 故可以利用拉格朗日积分求外部压强分布。不考虑质量力, 对不可压缩流体做定常运动, 有

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$$

代入外边界条件 $p|_{r \rightarrow \infty} = p_\infty$ 和 $V_\infty = \Gamma/(2\pi r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 可确定常数 $C = p_\infty/\rho$ 。由此得

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (r > r_0)$$

由此可见, 在涡核外部, 当 $r \rightarrow r_0$ 时, 速度增大, 压强降低; 当 $r = r_0$ 时, 涡核边缘上的速度和压强分别为

$$V_B = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}, \quad p_B = p_\infty - \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

4.5.2 涡核内部速度和压强分布

根据前面假定, 在涡旋核心, 流动定常、有旋, 并以角速度 ω 旋转, 故其速度分布为 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 具体形式为

$$\text{直角坐标系中} \quad u = -\omega y, \quad v = \omega x \quad (r \leq r_0)$$

$$\text{极坐标系中} \quad v_r = 0, \quad v_\theta = \omega r = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} r \quad (r \leq r_0)$$

容易验证, 涡核内部 $\omega_z = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2 = \omega \neq 0$ 。

下面求涡核内部压强分布。由于此时流动有旋, 故不能用拉格朗日积分; 若使用沿流线的伯努利积分, 由于此时流线为同心圆族, 故又无法求出不同流线沿径向的压强分布。因此, 为了确定沿径向的压强分布, 必须根据已知条件对欧拉方程进行直接积分运算。为此将直角坐标系的速度分布代入二维定常形式的欧拉方程中, 略去质量力, 得

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

将第一式和第二式分别乘以 dx 和 dy , 相加得

$$\rho \omega^2 (x dx + y dy) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = dp$$

两边积分, 并利用关系 $x^2 + y^2 = r^2$ 和 $V = r\omega$, 得

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) + A = \frac{1}{2} \rho V^2 + A$$

将边界条件: $r = r_0$ 时, $V|_{r=r_0} = V_B = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$, $p|_{r=r_0} = p_\infty - \frac{1}{2} \rho V_B^2$ 代入上式以确定积分常数 A , 得

$$A = p_\infty - \rho V_B^2$$

所以有

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho V_B^2 = \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 - \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2$$

由此可见, 在涡旋核心区, 压强与速度的平方呈线性关系, 涡核中心处速度 $V_{r=0} = 0$, 对应压强为

$$p_{r=0} = p_\infty - \rho V_B^2 = p_\infty - \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2$$

表明中心处压强 $p_{r=0}$ 较无穷远处压强 p_∞ 降低 ρV_B^2 , 随着 V_B 愈大, 压强下降得愈多。

图 4.20 画出了全流场的速度和压强分布规律。图中从涡核外到涡核内, 压强不断降低, 在涡核内部愈接近中心, 速度愈小, 压强急剧减小, 这样就在涡核中心处产生一个吸力, 可将外围物体吸向中心。涡旋中心压强降低规律可以解释自然界中见到的现象。例如, 台风或龙卷中心为低压区, 特别是龙卷中心气压极低(因为它的 Γ 大, r_0 小), 四周空气向中心剧烈辐合上升, 可摧毁建筑物, 并将重物举到空中。

值得注意的是, 在涡旋核心区, 压强和速度间关系与伯努利积分或拉格朗日积分中压强和速度间变化规律正好相反, 后者速度增大时压强减小, 而前者速度增大时压强增大。可见, 若不注意伯努利积分和拉格朗日积分的使用条件, 会发生很大的错误。

在实际问题中, 常常会遇到在很薄一层流体中切向速度发生剧烈变化的情况, 如

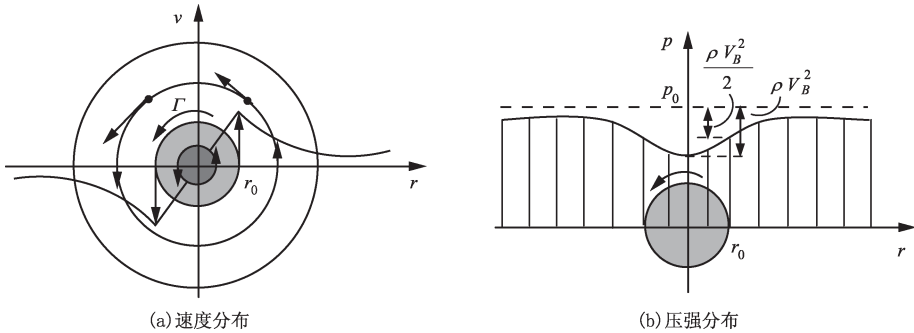


图 4.20 兰金组合涡的速度和压强分布

大气中冷暖空气接触处就是切向风速发生急剧变化的薄层。这种切向速度发生剧变的薄层称为切向速度间断面,因为该层中流动是处处有旋的,所以又称之为涡层。实验和理论分析都表明,涡层是不稳定的,微小的扰动即会使之发生变形,进而卷起成为一串涡旋。理论上已经证明,只要涡层两侧存在速度差,无黏、不可压流体涡层必是绝对不稳定的,这是涡层不稳定的充要条件,这类不稳定称为开尔文-亥姆霍兹不稳定。

另一类常见的涡旋发生的例子。当水流经桥墩时,会在其后左右两侧分离出两列涡旋,它们两两间隔,旋转方向相反,并以小于流速的速度向后运动,冯·卡门从理论上研究了这种双排涡列的稳定性,指出只有当 $h/l=0.2806$ 时涡列才是稳定的,见图 4.21。现在,人们将柱状物体后交错排列的涡列统称为卡门涡街。卡门涡街的存在常常会诱发和增强结构物的振动。若诱发振动的频率与结构物的自由振动频率相近时,会使振动加强,甚至对结构物造成破坏。如美国塔科马海峡大桥在 1940 年 11 月 7 日因涡街诱发强烈振动而导致坍塌。在流体流经山峰、海岛时也会在其后产生涡街。人们发现,在一定条件下这些涡街可以维持很长时间,以致对整个大气环流或洋流产生影响。

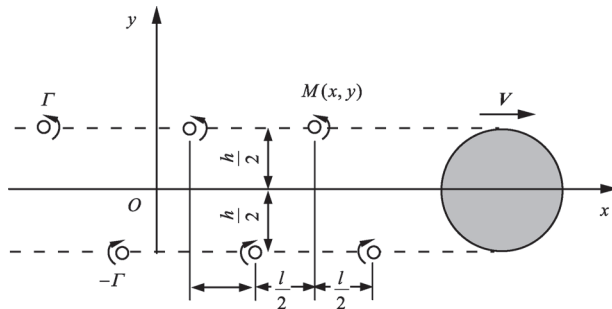


图 4.21 稳定的卡门涡街

应用例

例 1 涡旋基本概念的应用

例 1.1 求简单剪切流场中的涡线。

解: 已知速度场: $u = ky, v = w = 0$, 可求得涡量场为

$$\Omega_x = \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -k$$

由涡线方程(4.6), 有

$$dx = 0, \quad dy = 0$$

因此, 涡线方程为

$$x = C_1, \quad y = C_2$$

式中, C_1, C_2 是积分常数。可以看出, 涡线是与 z 轴平行的直线, 当 $k > 0$ 时, 指向 z 轴负方向(因 $\Omega_z = -k < 0$)。

例 1.2 已知流场: $u = a\sqrt{y^2 + z^2}, v = w = 0$, 求涡线。

解: 先由速度场求出涡量场 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, 有

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \frac{az}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \Omega_z = \frac{-ay}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

由涡线方程(4.6), 有

$$dx = 0, \quad \frac{dy}{\frac{az}{\sqrt{y^2 + z^2}}} = \frac{dz}{\frac{-ay}{\sqrt{y^2 + z^2}}}$$

经积分运算, 得涡线方程为

$$x = C_1, \quad y^2 + z^2 = C_2$$

式中, C_1 和 C_2 是积分常数。可以看出, 涡线是垂直于 x 轴的平面上的同心圆, 其方向为顺着 x 轴看呈逆时针($a > 0$)。

例 1.3 若流体块像半径为 a 的刚性圆盘绕中心轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转, 如图 4.22 所示, 求各点的涡量及沿周界的速度环量。

解: 这是所谓的“强迫涡旋”运动, 其速度场为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \omega r$$

流场中各点均做有旋的圆周运动, 且涡量相等, 即

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_z = 2\boldsymbol{\omega}$$

通过求速度的线积分或求曲面的涡通量, 可获得沿周界的速度环量为

$$\Gamma = \omega a \cdot 2\pi a = 2\pi\omega a^2 \quad \text{或} \quad \Gamma = \pi a^2 \Omega = 2\pi\omega a^2$$

环量与涡量之间有如下关系：

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} = \frac{\Gamma}{S}$$

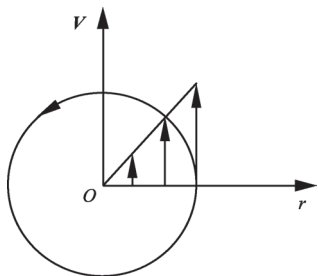


图 4.22 强迫涡 $V \propto r$

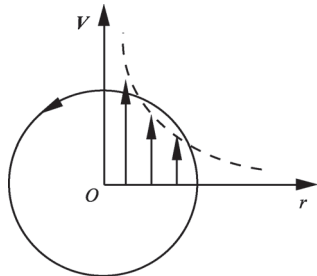


图 4.23 自由涡 $V \propto 1/r$

例 1.4 点涡运动如图 4.23 所示,其速度分布为 $v_r=0, v_\theta=k/r$,求各点的涡量及沿任一闭合轴线上的速度环量。

解: 中心点 O 是奇点(因 $v_\theta \rightarrow \infty$),其他各点均做无旋圆周运动,即 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0$ 。沿以 O 为圆心、 r 为半径的任意圆周上求速度的线积分,可得速度环量为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = v_\theta r \cdot 2\pi = \frac{k}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi k$$

上述计算表明:环量值与半径 r 的大小无关,实际上,沿包围 O 点任一闭曲线 L' 上的速度环量也都是 $2\pi k$ 。为了证明这点,做一条以 O 为圆心的圆周线 L ,以及连接 L 与 L' 的任意曲线 l ,如图 4.24 所示。考虑由 L, l 和 L' 所组成的封闭曲线,其所包围的面积为 S ,其速度环量和通过 S 面的涡通量为零,即

$$\oint_{L'} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{l^+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{l^-} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{-L} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

因沿曲线 l 来回积分 $\oint_{l^+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ 与 $\oint_{l^-} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ 相互抵消,又 $\oint_{-L} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = -2\pi k$, 所以有

$$\oint_{L'} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi k$$

得证。进一步推论可知,若所取封闭曲线不包围 O 点,则速度环量必定为零。因为曲线所围面上各点涡量为零,即无涡通量。将位于 O 点的涡称为点涡,环量 $\Gamma = 2\pi k$ 为点

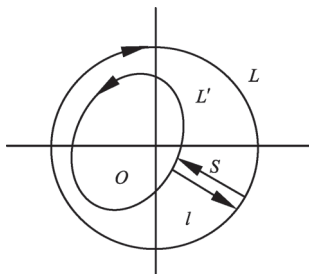


图 4.24 取封闭曲线

涡强度,这种流场又叫作“自由涡旋”场。点涡可理解为涡管截面缩为一点时的抽象情形——涡丝与某二维平面的交点。

从例 1.3 和例 1.4 可以看出,作为描述速度场积分性质的速度环量,只能反映流体曲面旋转的总趋势,不能反映其中每一点的旋转情况。或者说,涡通量只能反映曲面上诸点总的旋转情况,不能反映每一点的涡量。如果流场某一范围内,有些地方的涡量为正,另一些地方的涡量为负,则面上的总涡通量可能为零,即周线上不存在速度环量。

例 2 由速度分布求加速度环量

已知流体做平面运动,用极坐标表示的速度分布为 $v_r = 0, v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}(1 - e^{-r^2/4\nu t})$, 其中 Γ_0 和 ν 为常数,求加速度环量沿圆周 $r = R$ 的积分。

解:由已知速度分布可知,径向速度恒为零,故仅存在纬向加速度,即

$$a_\theta = \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{\Gamma_0 r}{8\pi\nu t^2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

根据涡旋运动学性质,加速度环量就是速度环量的随体导数,即

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_{r=R} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{r=R} a_\theta dl = -\oint_{r=R} \frac{\Gamma_0 R}{8\pi\nu t^2} e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} dl \\ &= -\frac{\Gamma_0 R}{8\pi\nu t^2} e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \cdot 2\pi R = -\frac{\Gamma_0 R^2}{4\nu t^2} e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \end{aligned}$$

例 3 涡旋守恒分析

例 3.1 试分析图 4.25 所示剪切流动的涡旋守恒。

解:该流场为平面流场,速度分布为: $u = ky, v = 0$, 它是一个有旋场,相应的涡量场为 $\boldsymbol{\Omega} = -k\mathbf{k}$, 涡线垂直于 xy 平面。由于流动中各点加速度为 $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = 0$, 故沿任意物质环线速度环量的随体导数为零,即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{r=R} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由开尔文定理知,这种流动的涡旋是守恒的。如图 4.25 所示,在 t 时刻由 $ABCD$ 诸流体质点组成的方截面涡管,在下一时刻 t' 因运动而变为菱形 $A'B'C'D'$ 的涡管。显然,原先组成涡线、涡管的流体质点,因涡旋守恒,在 t' 时刻仍组成涡线、涡管,并且其涡管强度保持不变。

例 3.2 开口宽广容器的底部有一小孔出流,如图 4.26 所示,设流动定常(水面高度不变),且流动有旋,试分析涡旋的守恒性。

解:由于流体是理想不可压缩重力流体,满足开尔文定理条件,故涡旋守恒。以

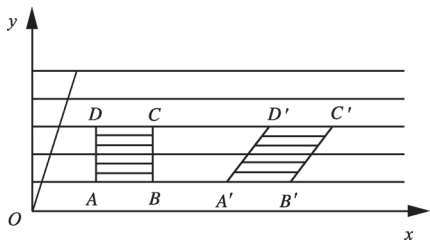


图 4.25 剪切流动的涡旋守恒

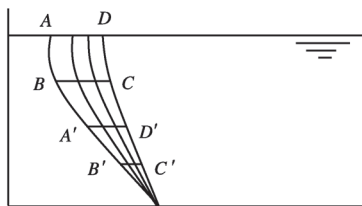


图 4.26 小孔出流的涡旋守恒

下证明本例中涡线与流线是重合的。在理想不可压缩、质量力有势及定常条件下,将兰勃方程改写为

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right)$$

式中, $U = gz$, $P = p/\rho$ 。此外,沿流线有伯努利积分

$$\frac{V^2}{2} + U + P = C_s$$

对于水面上的点来说, $V \approx 0$, $U = gh$, $P = p_0/\rho$, 因此,水面各点的值 $V^2/2 + U + P = gz + p_0/\rho$ 都相等,这样,通过水面各条流线的常数值 C_s 都一样大,或者说,流体内部各点的三项之和 $V^2/2 + U + P$ 都相等,其梯度为零,再代入兰勃方程,得

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{V} // \boldsymbol{\Omega}$$

由此证明了涡线与流线重合,即任一时刻的流管就是涡管。若 t 时刻流体质点 A 和 B 在一根涡线上,下一时刻 t' ,它们运动到 A' 和 B' 后仍在一根涡线上(因定常流动,迹线与流线重合,迹线也与涡线重合)。对于原来的一段涡管 $ABCD$,运动变形后的 $A'B'C'D'$ 仍为涡管,且涡通量不变。其实这种流动是一类具有 $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$, 即速度方向与涡量方向始终一致的特殊流动情形,这类流动又称为 Beltrami 流动。

例 4 毕奥-沙伐尔公式的应用

平面上一对点涡的初始位置如图 4.27 所示,试分别就图中(a)、(b)两种情形决定涡旋 A, B 的运动。

解:对情形(a),由毕奥-沙伐尔公式可求出 A 点和 B 点的速度大小为 $V_A = V_B = \Gamma/(4\pi a)$,其方向沿 y 轴负向,所以点涡 A 和 B 将以 $u = 0, v = -\Gamma/(4\pi a)$ 做等速直线运动,其运动轨迹分别为

$$x_A = a, \quad y_A = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$

和

$$x_B = -a, \quad y_B = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$

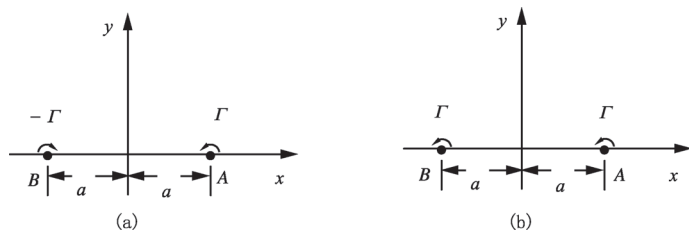


图 4.27 一对点涡

对情形(b), 应用毕奥-沙伐尔公式可知两点涡 A 和 B 的速度仍为 $V_A = V_B = \Gamma/(4\pi a)$, 但其运动方向与情形(a)不同, 刚开始时 A 点向上运动, B 点向下运动, 结果形成绕坐标原点, 沿半径为 a 的圆周的等速转动, 其转动角速度为 $\omega = V/a = \Gamma/(4\pi a^2)$ 。因此, 点涡 A 和 B 的运动轨迹用极坐标表示为

$$r_A = a, \quad \theta_A = \frac{\Gamma}{4\pi a^2} t$$

和

$$r_B = a, \quad \theta_B = \pi + \frac{\Gamma}{4\pi a^2} t$$

当有 N 个二维点涡时就构成一个二维点涡系。它是涡旋动力学理论中的经典问题, 数值计算中模拟大 Re 数二维流动的离散涡方法正是以点涡系动力学为基础的。人们还发现, 当点涡数目增加时其运动轨迹的长期特性将不再可以预测, 即出现混沌, 又称这种用拉格朗日方法描述的混沌为拉格朗日混沌, 它是探索湍流奥秘的一个很有前途的方向。

实践题

1. 已知速度场为 $u = y + 2z, v = z + 2x, w = x + 2y$ (m/s)。求: (1) 涡量场和涡线族; (2) 通过 $z = 0$ 平面上 $S = 0.01 \text{ m}^2$ 面积的涡通量; (3) 通过 $x + y + z = 1$ 平面上 $S = 0.01 \text{ m}^2$ 面积的涡通量。

2. 平面流场中流体质点做平行于 Ox 轴的运动, 速度场为 $u = ky, v = 0$, 式中, k 是常数。求沿边长分别为 a 和 b 的矩形的速度环量, 矩形的边分别平行于 Ox 轴和 Oy 轴。

3. 已知速度场为 $\mathbf{V} = x^2 y \mathbf{i} - xy^2 \mathbf{j} + 5k$ 。试用斯托克斯公式计算沿圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的速度环量。

4. 已知速度场为 $\mathbf{V} = 3y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j} - 4k$ 。试用斯托克斯公式计算沿椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 的速度环量。

5. 已知平面速度场为 $u = -ky/(x^2 + y^2), v = kx/(x^2 + y^2)$, 式中, k 为常数。求

沿如下两种封闭回线的速度环量,并说明环量与回线 L 形状无关:(1) 回线 L 包围原点;(2) 回线 L 不包围原点。

6. 假设流场中有一孤立涡管,在涡管外流动是无旋的, L 是流场中的封闭回线,证明当 L 不包围涡管时,沿 L 的速度环量为零;当 L 包围涡管时,沿 L 的速度环量等于该涡管的涡管强度。如果流场中有若干个孤立涡管,封闭回线 L 包围这些涡管,证明沿 L 的速度环量等于这些涡管的涡管强度之代数和。

7. 流体做平面运动,在环形区域 $a_1 < r < a_2$ 中涡量等于一个常数,而在 $r < a_1$ 和 $r > a_2$ 区域中流体是静止的。设圆 $r = a_1$ 和 $r = a_2$ 是流线,且 $r = a_1$ 上流速为 V , $r = a_2$ 上流速趋于零。试证明该环形区域内的涡量值为 $\Omega = 2a_1V/(a_1^2 - a_2^2)$ 。

8. 已知流体做平面运动,用极坐标表示的速度分布为 $v_r = 0, v_\theta = \Gamma_0[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}]/(2\pi r)$,式中, Γ_0 和 ν 为常数。求:(1) 涡量场 Ω ;(2) 沿任一圆周 $r = R$ 的速度环量 Γ 及通过全平面的涡通量;(3) 分析 Ω 和 Γ 随 r, t 的变化规律。

9. 已知平面速度场为 $u = -\beta y t^2, v = \beta x t^2$,式中,常数 $\beta > 0$ 。求 $t = 1$ 时沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的速度环量随时间的变化率。

10. 假定流体是无黏和不可压缩的,且质量力有势。试判断下列运动是有旋的还是无旋的:(1) 无穷远来的剪切流流过一静止物体;(2) 无穷远均匀来流绕一旋转的圆柱体流动。

11. 证明在理想不可压缩流体平面运动中,若质量力有势,则沿迹线 $d\Omega/dt = 0$,且在定常运动时,沿流线涡量 Ω 保持常值。

12. 盐水的密度随含盐量的增大而增大。若在咸水湖与淡水湖之间开一运河,问河道纵剖面内的水流趋势如何,并做图表示之。

13. 设环流积分路径 L 由等压线和铅垂线(平均等温线)组成,如图 4.28 所示,证明沿 L 的速度环量变化率为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = R d\bar{T} \ln \frac{p}{p - dp} \approx R d\bar{T} \frac{dp}{p}$$

式中, R 为空气的气体常数。

14. 若计算海风环流的积分路径为一垂直平面内的矩形,水平方向从海岸伸向海洋和陆地各约 10 km,垂直方向从地面($p = 10^5$ Pa)到 500 m 高度($p - dp = 95000$ Pa),气层中平均温度沿水平方向从海面向陆地的变化率为 $0.3^\circ\text{C}/\text{km}$,试利用题 13 的公式求温差出现一小时后环流回路上的平均风速。

15. 设在不可压缩无界流场中有一强度为 Γ 的直涡线,求下列情况下此直涡线流场中离涡线距离为 a 的 P 点处的速度:

(1) 涡线为有限长,两端到 P 点的连线与涡线的夹角分别为 α_1 和 α_2 ,如图 4.29 所示;

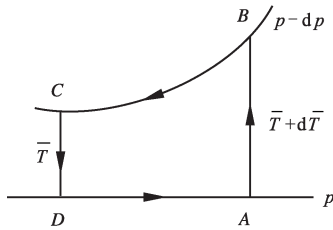


图 4.28 题 13 图

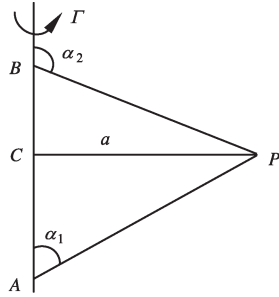


图 4.29 题 15 图

(2) 涡线为半无限长, 即一端点为图 4.29 中的 C 点, 另一端点 B 向上伸向无限远;

(3) 涡线为无限长, 即图 4.29 中端点 A, B 分别向下、向上伸向无限远。

16. 设在不可压缩无界流场中有一半径为 a 、强度为 Γ 的涡环(圆周形涡线), 求过圆心的对称轴线上的速度。

17. 在不可压缩无界流场中给定涡量分布为 $\boldsymbol{\Omega} = 2\omega\mathbf{k}$ ($r \leq a$) 或 0 ($r > a$), 式中, a 和 ω 为常数, r 是场点到 z 轴的距离, \mathbf{k} 是柱坐标中 z 方向的单位矢量。设无穷远处压强为 p_∞ , 质量力不计。求速度分布和压强分布。

18. 试分析下列情况下点涡是怎样运动的: (1) 两个强度相等的平面点涡, 其旋转方向相反; (2) 两个强度不相等的平面点涡, 其旋转方向相反; (3) 两个强度相等的平面点涡, 其旋转方向相同; (4) 两个强度不相等的平面点涡, 其旋转方向相同。

本章小结

本章研究涡旋运动的运动学和动力学性质, 揭示涡旋守恒的条件和变化规律。

1. 基本概念

(1) 微元流体涡旋运动描述的两种观点

场观点: 涡量(度) $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$; 质点观点: 微团自转角速度 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}/2$ 。

(2) 有限体积流体涡旋运动的描述

速度环量 $\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ 和涡通量 $J = \int_\sigma \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 。关系为 $J = \Gamma$ 。

(3) 涡旋运动的几何描述

涡线、涡面和涡管。涡线是涡度场的矢量线, 其方程为 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ 。

(4) 压容力管、正压流体与斜压流体

2. 基本理论

(1) 微元流体涡旋运动理论

一般情况: 涡量方程
$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{F} - \nabla\alpha \times (-\nabla p) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$$

涡旋守恒: $\text{Helm}\boldsymbol{\Omega} = 0$

(2) 有限体积流体涡旋运动理论

亥姆霍兹第一定理(运动学): 同一时刻、同一涡管、不同截面,
$$\int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\sigma_2} \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

开尔文运动学定理: 环流加速度等于加速度环流, 即
$$d\Gamma/dt = \oint_L (d\mathbf{V}/dt) \cdot d\mathbf{l}.$$

开尔文动力学定理: 满足理想、正压和质量力有势条件, 涡旋守恒 $d\Gamma/dt = 0$; 反之, 若流体为黏性、斜压和质量力无势, 则 $d\Gamma/dt \neq 0$ 。

推论 I (拉格朗日定理或速度势存在定理): 满足理想、正压、质量力有势条件, 无旋流动永远无旋, 即存在速度势。

推论 II (亥姆霍兹第二、第三定理): 满足理想、正压、质量力有势条件, 涡线、涡管守恒, 涡管强度守恒。

(3) 皮叶克尼斯定理

理想、斜压和质量力有势条件下:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_s [\nabla\alpha \times (-\nabla p)] \cdot d\mathbf{S} = N_+ - N_-$$

3. 基本方法

(1) 已知速度分布, 根据定义式求涡线方程、速度环量、涡通量和涡管强度;

(2) 利用皮叶克尼斯定理定性判断速度环量的变化趋势;

(3) 利用毕奥-沙伐尔公式确定涡旋场中的速度分布、流体轨迹等问题;

(4) 利用兰金组合涡确定涡旋场中速度分布和压强分布问题。

第 5 章 流体波动理论基础

流体波动是自然界的一种常见运动形式。例如,舰船运动在水面形成的“V”字形波浪;大气运动经常呈现波动形式,在天气图上可以见到对流层中上层气压场或流场的波动,这种波动的发展对天气演变有直接影响。从海面波浪到海水内部波动(例如海洋内波),都是海洋中海水重要的运动形式之一。因此,波动问题在大气和海洋科学中具有十分重要的地位。流体波动的基本特点是,在外力的作用下,流体质点离开其平衡位置做周期性或准周期性的运动。由于流体的连续性,必然带动其邻近质点,导致其运动状态在空间的传播,因此,运动随时间和空间的周期性变化为波动的主要特征。

本章介绍流体波动的基本概念、规律和处理方法,主要研究不可压缩理想流体在重力场作用下的波动。实际上是运用流体运动学和动力学的基本理论,讨论流体波动这种特殊运动形式,得出相应的数学表达式并进行求解分析。全章内容分为五个部分:第一,介绍波动基本概念;第二,建立重力表面波基本方程;第三,求平面重力表面波基本解,并研究驻波和行进波的波动特征及流体质点的运动特征;第四,讨论波群和群速度;第五,讨论波动能量及其传递。

5.1 波动基本概念

连续介质中的一切质点都是彼此联系着的,一个质点在介质内振动,通过彼此相互作用,它的振动能量就传递给周围质点,引起周围质点的振动,振动在介质中的传播就称为波动。应当注意,传播的只是振动的形式和能量,而振动的质点并不随波向前移动,它只在自己的平衡位置附近振动。例如,水面上的浮体,当波浪经过时,它仅在原来位置附近颠簸而并不随波前进。所以,要注意区分波速和质点振动速度,不要混为一谈。

流体的波动是怎样产生的。当流体质点受到扰动偏离平衡位置时,因某种恢复力的作用而又回到原来位置的趋势,这就形成振动。又由于流体质点之间相互作用,这种振动将逐点地依次向外传播出去,于是形成波动。由此可见,流体的波动可因流体本身性质及作用力性质的不同而具有不同的类型。例如,由于重力而产生的波叫“重力波”,由于表面张力而产生的微波叫“涟漪”,由于日、月吸引而产生的波叫“潮汐波”;在可压缩流体内部,因压缩、膨胀而产生的波则称为“弹性波”。

这里着重解释一下重力表面波产生的物理机制。重力表面波是具有自由表面的不可压缩理想流体在重力作用下产生的表面波。例如,当平静的水面受到某种扰动出现凹凸不平的起伏时,考虑自由面下某一水平面不同位置的压强分布,由于重力作用,凸面下部的压强比凹面下部压强大,产生水平气压梯度力,引起流体运动,因而凸面下部有水平的

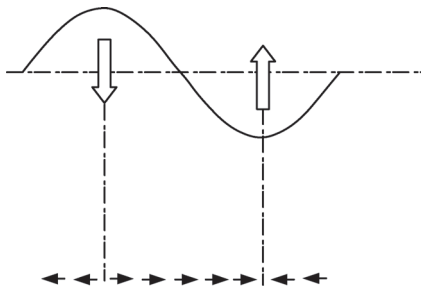


图 5.1 重力表面波的形成

速度辐散,凹面下部有水平速度辐合,由于流体不可压缩,水平的辐散辐合,必将引起竖直的下落和上升运动,由此改变原来凹凸不平的液面形状,再加上流体的惯性作用,便形成重力表面波,如图 5.1 所示。

对于简单的平面波动可以用自由面位移方程 $z = \zeta(x, t)$ 表示,例如水面的波动,其中 x 轴与未扰动的自由水面重合, z 轴竖直向上,波面位置(或波高) ζ 是 x 和 t 的周期函数。实际上,对于任何形式的波动,根据傅里叶原理,总可以看成由无数或有限多个不同频率及不同波幅的简谐波叠加而成。这种简谐波可以是余弦波或正弦波。例如,余弦波可表示为

$$\zeta = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - Ut) = a \cos(kx - \sigma t) \quad (5.1)$$

式中, $(kx - \sigma t)$ 称为位相,同位相的点具有相同的状态,且位相随 x 和 t 而异。同位相的点组成的面叫波阵面(注意,不要与自由表面相混);等位相面以一定速度 U 向前传播,这个速度称为相速,也就是波的传播速度,即波速; λ 称为波长,波形以该长度重复出现,它反映波动随空间分布的周期性; $k = 2\pi/\lambda$ 称为波数,它表示 2π 距离内所含波的数目; $\sigma = 2\pi U/\lambda = 2\pi\nu$,它是频率的 2π 倍,称为圆频率。波速、波数和圆频率之间的关系可写为

$$U = \lambda\nu = \frac{\sigma}{k} \quad (5.2)$$

平面余弦波波动还可以用复函数来表示,即

$$\zeta = \text{Re}[ae^{i(kx - \sigma t)}] \quad \text{或} \quad \zeta = ae^{i(kx - \sigma t)} \quad (5.3)$$

在波动中,若流体质点的振动方向与波形传播方向垂直,则称为横波。若质点振动方向与传播方向平行,则称为纵波。此外,若波长比流体深度大得多,则叫作长波,例如潮汐波就属于长波。若波长比深度小得多,并且波动主要局限于流体表面附近一层,对深处流体影响很小,则叫作表面波,例如重力波和涟波即属于此类。

本章讨论流体的波动问题,主要研究流体作为整体的波动特征以及其中每个流

体质点的振动特性,从而掌握各物理量(如自由高度、压强和速度等)的空间分布随时间的变化规律。着重研究不可压缩理想流体中的平面表面波。研究的基本思路仍然是从基本方程出发,借助数学工具进行分析求解。因此,必须先建立描述重力表面波运动规律的基本方程组。

5.2 重力表面波

本节讨论不可压缩理想流体在重力作用下产生重力表面波的基本方程和定解条件。实际上就是把流动的物理问题转换为数学问题。以后分析具体波动时,即可由此出发求解。需要指出的是,重力表面波是无旋波,因此,可以采用速度势的分析方法进行处理。

5.2.1 不可压缩理想流体重力表面波无旋运动

流体在平衡时,其自由表面是水平的,各质点速度为零。假如表面上流体质点突然受到一短暂力作用(如阵风吹过),使流体质点发生运动,便形成重力表面波。现在证明,对于不可压缩理想重力流体,由于短暂力作用,其在自由面上形成的波动是无旋的。

首先证明,原来静止的理想不可压缩流体,在表面受一短暂力作用,结束时的运动是无旋的。当一短暂力作用于表面上某点时,使其压强发生巨大变化,并立即引起整个流体的每一个点压强也发生巨大变化,由原来的 p 变为 $p+p'$,并且 $p' \gg p, \nabla p' \gg \nabla p$,由于短暂力作用时间 δt 很小,因此,短暂压强的冲量 $I = \int_0^{\delta t} p' dt$ 是有限的。为了研究短暂压强冲量的作用,考虑动量方程:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla (p + p') = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (5.4)$$

将它从短暂力初始时刻($t = 0$)到结束时刻($t = \delta t$)进行积分,得

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_0 = \int_0^{\delta t} \frac{1}{\rho} \nabla p' dt \quad (5.5)$$

式中, \mathbf{V} 和 \mathbf{V}_0 表示空间某一点处在短暂力作用结束及开始时刻的速度。事实上,由于 δt 很小,可以认为流体质点都没有发生位移,因此, \mathbf{V} 和 \mathbf{V}_0 也可看作是同一流体质点在短暂力作用前后的速度。因而上式也就是流体质点动量变化与冲量之间的关系。需要说明的是,在推导过程中,由于式(5.4)左端的 $\int_0^{\delta t} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} dt$ 以及右端的 $\int_0^{\delta t} \mathbf{F} dt$ 和 $-\int_0^{\delta t} \frac{1}{\rho} \nabla p dt$ 都比 $-\int_0^{\delta t} \frac{1}{\rho} \nabla p' dt$ 小很多,因此,都可略去。

交换式(5.5)右端的梯度运算与对时间积分运算的次序,并考虑流体为不可压缩,以及初始时刻流体处于静止,则有

$$\mathbf{V} = - \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \nabla p' dt = \nabla \left(- \frac{I}{\rho} \right) \quad (5.6)$$

此式表明,短暂作用力结束时刻的流动是无旋的,其速度势 $\phi = -I/\rho$ 。顺便指出,如果短暂力作用前的流体不是静止的,且做无旋运动, $\mathbf{V}_0 = \nabla \phi_0$, 则短暂力作用后的流动仍然无旋,其速度势为 $\phi = \phi_0 - I/\rho$ 。

下面进一步说明,为什么在表面上短暂作用力停止后,流体的运动仍然是无旋的。将短暂力结束的时刻作为波动初始时刻,由于质量力只是重力,满足涡旋守恒的三个条件,则之后仍为无旋运动。事实上,若直接给出理想不可压缩重力流体的条件,由拉格朗日定理可知,从静止开始的运动总是无旋的,不管这种运动是由表面短暂力引起的,还是由表面初始凹凸不平引起的,或者两种原因同时兼有。既然这种波动是无旋的,便可用速度势 ϕ 来讨论它的性质。

5.2.2 重力表面波基本方程

引入速度势来处理重力表面波,其连续性方程可用拉普拉斯方程表示,即

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (5.7)$$

动量方程可用拉格朗日积分表示,即

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = G(t) \quad (5.8)$$

式(5.7)和(5.8)就是不可压缩理想重力流体波动的两个基本方程,只要给出适当的边界条件和初始条件,从理论上讲,即可求出速度势 ϕ_1 和压强 p 。但实际上,由于波动的自由边界是未知的,且描述边界条件的方程中要出现非线性项,数学上的处理极其困难。然而,如果局限于讨论小振幅波,则这些边界条件可以简化,使问题得以近似处理。

所谓小振幅波,包含下面三个假设:

- ① 由波动引起的质点运动速度是一个小量,使其平方项为高阶小量;
- ② 波动时的自由面 $z = \zeta(x, y, t)$ 相对于静止时自由面 $z = 0$ 的偏离很小,因此,在讨论自由面边界条件时可用水平面 $z = 0$ 的物理量代替自由面 $z = \zeta$ 上的物理量;
- ③ 自由面的切平面与水平面相差无几,即切平面斜率 $\partial \zeta / \partial x$ 和 $\partial \zeta / \partial y$ 都是小量,则 $u \partial \zeta / \partial x$ 和 $v \partial \zeta / \partial y$ 为高阶小量,故不考虑平流项。

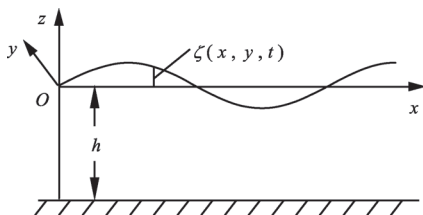


图 5.2 重力表面波

根据小振幅波假设,拉格朗日积分中的 $V^2/2$ 项与其他项相比,为高阶小量,可以略去,于是近似地得到

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = G(t)$$

或改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi_1 - \int G(t) dt + \frac{p_0}{\rho} t \right] + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0$$

式中, p_0 是自由面上的压强,若引进 $\phi = \phi_1 - \int G(t) dt + (p_0/\rho)t$,则有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (5.9)$$

式中, ϕ 代替了 ϕ_1 作为流场的速度势,因为在原速度势 ϕ_1 中仅增加了与 t 有关的常数项,并不改变速度场(ϕ 对空间求导),而且仍然满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 。这样,式(5.9)和 ϕ 的拉普拉斯方程就是不可压缩理想流体重力表面波的基本方程。由于拉普拉斯方程的解很多,要确定唯一解,还需要给出一定的边界条件和初始条件。

5.2.3 边界条件和初始条件

(1) 边界条件

流体的边界一般由底部固壁和自由面组成,在静止底壁上的流体必沿切向流动,即法向速度为零($V_n = \partial \phi / \partial n = 0$)。若底壁为固定平面 $z = -h$,则底部边界条件可写为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0 \quad (5.10)$$

自由面上的边界条件比较复杂,它可分为动力学条件和运动学条件。设自由面方程为 $z = \zeta(x, y, t)$,在自由面上流体压强为 $p = p_0$,带入拉格朗日方程(5.9),得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} + g\zeta = 0 \quad \text{或} \quad \zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \quad (5.11)$$

此式即为自由面上的动力学条件,若速度势 ϕ 为已知,则可由此式确定自由面形状即波的轮廓,所以又叫作波轮廓方程。若考虑小振幅波的假设,其右端在 $z = \zeta$ 处的 $\partial \phi / \partial t$ 值可近似地用 $z = 0$ 处的值代替,则有

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (5.12)$$

现在讨论自由面上的运动学条件。由于自由面是物质面,即自由面上的流体质点在流动中仍处于自由面上,因此,其铅直速度分量为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (5.13)$$

由小振幅波假设,上式右端后两项可以略去,左端用速度势表示,故有

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (5.14)$$

利用式(5.11),得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} \quad (5.15)$$

式(5.12)和(5.15)分别是自由面上的动力学条件和运动学条件。

(2) 初始条件

要唯一确定一个波动解,还必须给定初始条件,即波动刚开始时的 ϕ 及 $\partial\phi/\partial t$ 的值。考虑到波动的起因可以是因为初始液面不平,或是因为有短暂力作用引起的初速度,或是两种原因兼有,因此,波动的初始条件可分为三种类型。

第一种类型:由于自由面上的短暂力作用,波动具有初始速度。自由面上短暂力的冲量 $I_0 = \int_0^{\infty} p' dt$ 是已知函数,因此,短暂力结束时,自由面上的初始速度势是已知函数,即

$$\phi(x, y, 0, 0) = -\frac{I_0}{\rho} = F(x, y)$$

而自由面的高度仍然为零,即 $\zeta(x, y, 0) = 0$,代入式(5.12),得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = 0$$

所以,这种类型的初始条件可归纳为

$$\phi|_{t=0, z=0} = F(x, y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{t=0, z=0} = 0 \quad (5.16)$$

第二种类型:在 $t = 0$ 时,自由面的初始抬高为 $\zeta(x, y, 0)$,流体质点初始速度为零。由式(5.11),初始时刻在自由面上,有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta(x, y, 0) = f(x, y)$$

并且,初始时刻处处 $\phi = \text{常数}$ (无速度)。因此,第二类初始条件可归纳为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{t=0, z=0} = f(x, y), \quad \phi|_{t=0, z=0} = \text{常数} \quad (5.17)$$

第三种类型:在初始时刻,既存在初始速度又存在初始液面,则初始条件的形式为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{t=0, z=0} = f(x, y), \quad \phi|_{t=0, z=0} = F(x, y) \quad (5.18)$$

综上所述,不可压缩理想流体在重力作用下的表面波是无旋运动,其基本问题是求满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 的速度势 $\phi(x, y, z, t)$,以及边界条件和初始条件。求出

速度势 ϕ , 即可得到速度场 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 。最后, 可利用拉格朗日积分(5.18) 求压强场。

下面将从基本方程和定解条件出发, 求简单的平面重力表面波的基本解, 并进一步分析波动的基本特性。

5.3 平面重力表面波

5.3.1 平面重力表面波基本方程

所谓平面波, 是指这样一种平面运动, 即各流体质点都在同一平面内做振动, 而沿 y 方向的速度分量为零, 即 $v = 0$, 而且各物理量沿 y 方向不变, 即 $\partial/\partial y = 0$ 。当然, 质点振动也是在 xz 平面内传播的, 如图 5.3 所示。

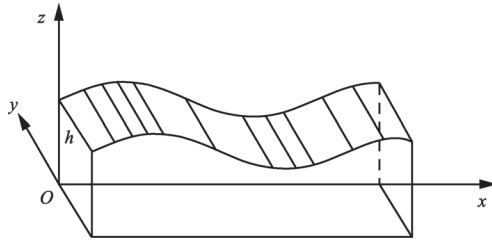


图 5.3 平面运动

由于在平行于平面 xz 的各个平面内, 流体质点的运动情况完全相同, 因此, 只需研究一个平面内的波动。注意到各物理量与 y 无关, 即 $\phi = \phi(x, z, t)$, 由此列出平面重力表面波的基本方程和边界条件如下:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (5.20)$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h \text{ 或 } z=-\infty} = 0 \quad (5.23)$$

由于这里只讨论周期运动的波动, 并不特指某一具体的波, 因此, 可以不必考虑初始条件。这样, 上述方程组就是平面小振幅波应服从的基本规律, 也是分析的依据和出发点。

5.3.2 平面重力表面波基本解

应用分离变量法,由拉普拉斯方程和自由面上的运动学条件求解速度势,为此设 $\phi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t)$, 代入式(5.19), 整理得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2 \quad (5.24)$$

因为上式左端仅为 x 的函数,右端仅为 z 的函数,要等式对任意的 x 和 z 都满足,它们必须都等于某个常数。又考虑到是研究波动问题,其解沿 x 方向应当具有周期性,因此,取常数为负值 $-k^2$ 。容易解得,式(5.24)关于 $X(x)$ 和 $Z(z)$ 的解分别为

$$\begin{aligned} X(x) &= B_1 \cos kx + B_2 \sin kx \\ Z(z) &= C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \end{aligned} \quad (5.25)$$

式中, B_1, B_2, C_1, C_2 为任意常数。

若把 ϕ 的分离变量形式代入式(5.22),简单整理后得

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -g \frac{Z'(z)}{Z(z)} \Big|_{z=0} = -\sigma^2 \quad (5.26)$$

常数值之所以取负值,是因为考虑到波动解对时间也应当呈周期性变化,方程(5.26)的解为

$$T(t) = A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t$$

所以, ϕ 的特解为

$$\phi(x, z, t) = (A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t)(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx)(C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \quad (5.27)$$

由于方程都是线性的,因此,通解为所有可能之特解的叠加,即

$$\phi = \sum_{i=1}^n (A_{1i} \cos \sigma_i t + A_{2i} \sin \sigma_i t)(B_{1i} \cos k_i x + B_{2i} \sin k_i x)(C_{1i} e^{k_i z} + C_{2i} e^{-k_i z})$$

式中, ϕ 可看作是不同波长的波叠加的总速度势。下面将着重分析其中的一个特解,即式(5.27)。考虑不同深度的流体,分别讨论无限深($z = -\infty$)及有限深($z = -h$)两种情况。

对于无限深流体,则 ϕ 必须满足底部边界条件,即

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-\infty} = 0$$

由此决定 $C_2 = 0$,因此,无限深流体中的平面波速度势特解为

$$\phi(x, z, t) = (A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t)(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx)C_1 e^{kz} \quad (5.28)$$

它对应某一个确定波长的平面重力表面波,根据叠加原理,将它进一步分解,看作是四个简单波的速度势之和,即四种简单波的叠加:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad (5.29)$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_1 &= C' e^{kz} \cos\sigma t \cos kx \quad (C' = A_1 B_1 C_1) \\ \phi_2 &= C'' e^{kz} \sin\sigma t \cos kx \quad (C'' = A_2 B_1 C_1) \\ \phi_3 &= C''' e^{kz} \cos\sigma t \sin kx \quad (C''' = A_1 B_2 C_1) \\ \phi_4 &= C^{(4)} e^{kz} \sin\sigma t \sin kx \quad (C^{(4)} = A_2 B_2 C_1)\end{aligned}$$

若分别代入式(5.21),则可求出它们的相应波形为

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{C'\sigma}{g} \sin\sigma t \cos kx \\ \zeta_2 &= -\frac{C''\sigma}{g} \cos\sigma t \cos kx \\ \zeta_3 &= \frac{C'''\sigma}{g} \sin\sigma t \sin kx \\ \zeta_4 &= -\frac{C^{(4)}\sigma}{g} \cos\sigma t \sin kx\end{aligned}$$

而合成波的总波形为四个简单波叠加而成,即

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (5.30)$$

对于有限深流体,底部边界条件为 $(\partial\phi/\partial t)_{z=-h} = 0$,将一般的平面重力表面波特解,即式(5.27)代入,便可求得常数 C_1 与 C_2 的关系,最后得有限深平面重力表面波的速度势为

$$\phi = D \operatorname{ch}k(z+h)(A_1 \cos\sigma t + A_2 \sin\sigma t)(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx) \quad (5.31)$$

式中, D 为任意常数,类似于无限深情况,有限深平面重力表面波的速度势也可看成是四个简单波的速度势之和,即

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_1 &= C' \operatorname{ch}k(z+h) \cos\sigma t \cos kx \\ \phi_2 &= C'' \operatorname{ch}k(z+h) \sin\sigma t \cos kx \\ \phi_3 &= C''' \operatorname{ch}k(z+h) \cos\sigma t \sin kx \\ \phi_4 &= C^{(4)} \operatorname{ch}k(z+h) \sin\sigma t \sin kx\end{aligned}$$

式中, $C', C'', C''', C^{(4)}$ 都是常数。

下面根据速度势解的形式,以无限深流体中的两种典型波动,即驻波和行进波为例,分析其整体的波动特性和单个流体质点的运动特性。

5.3.3 驻波

以无限深流体为例,研究不可压缩理想流体平面重力表面波的一种最简单形式——驻波。实际上,速度势(5.29)中的四个叠加单元,每一个都代表驻波。现以 ϕ_3 为例,分析它所代表的流动情况。为书写方便,略去下标,可写为

$$\phi = Ce^{kz} \cos\sigma t \sin kx \quad (5.32)$$

式中, C, σ, k 均为常数。

(1) 波形

为讨论波动特性, 首先研究自由面的形状, 也就是波轮廓线, 为此, 将式(5.32)中的 ϕ 代入式(5.21), 得

$$\zeta = \frac{-1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{C\sigma}{g} \sin\sigma t \sin kx = A(t) \sin kx \quad (5.33)$$

上式表明, 波的高度随时间和空间都呈周期性变化, 为正弦波形。在每一个确定时刻 ($t = \text{常数}$), 波轮廓线为正弦型, 即波高随空间坐标按正弦曲线变化; 在每一个固定的空间点处 ($x = \text{常数}$), 波高变化的幅度也不一样。 $C\sigma/g = a$ 是波的最大幅度, 称为波幅, 如图 5.4 所示。

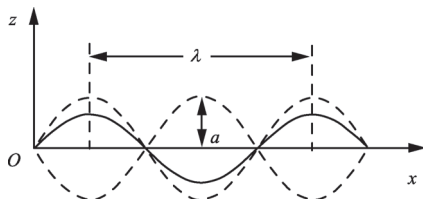


图 5.4 驻波

波轮廓线与 x 轴的交点叫作波节点, 在波节处 $\zeta = 0$ 。波形的最高点叫波峰, 最低点叫波谷, 它们统称波腹, 这是波动幅度最大的地方。由式(5.33)可知, 当 $\sin kx = 0$ 时总有 $\zeta = 0$, 故节点的位置是

$$x = \frac{n\pi}{k} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

而 $\sin kx = \pm 1$ 时, 则为腹点位置, 即

$$x = \frac{\pi}{2k} (2m + 1) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

从上面的讨论可看出, 波节点和波腹点位置都是固定点, 其坐标不随时间变化, 亦即流体表面的波形不传播, 故称为驻波。因此, $\phi = Ce^{kz} \cos\sigma t \sin kx$ 所表示的流体运动是波形不移动的驻波。

(2) 波长和周期

自由面波形重复出现的最近距离称为波长, 常记作 λ , 由于

$$\sin kx = \sin k \left(x + \frac{2\pi}{k} \right)$$

代入波形表达式(5.33)可知, 横坐标相距 $2\pi/k$ 时, 波形重复出现, 所以, 波长为 $\lambda = 2\pi/k$, 从而 $k = 2\pi/\lambda$, 这里 k 称为波数。

从式(5.33)还可以看出, 由于

$$\sin\sigma t = \sin\sigma \left(t + \frac{2\pi}{\sigma} \right)$$

即在 $t+2\pi/\sigma$ 时刻, 流体质点振动完全相同。也就是说, 经 $2\pi/\sigma$ 时间, 质点完成一个全振动, 所以, 振动周期 $T = 2\pi/\sigma$, 从而 $\sigma = 2\pi/T$, 这里 σ 就是圆频率。

下面分析 σ 与 k 之间的关系, 又称频散关系。将速度势表达式(5.32)代入自由面上的运动学条件(5.22), 可得

$$\sigma^2 = kg \quad (5.34)$$

可见, 此种波的频率与波数之间有确定的关系。由此还可得出, 波长与周期之间的关系 $\lambda = gT^2/(2\pi)$, 表明波长与周期的平方成正比。

(3) 速度、流线、迹线和压强

首先讨论速度场分布情况, 由 $\mathbf{V} = \nabla\phi$ 很容易求出速度场为

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = Ck e^{kz} \cos\sigma t \cos kx, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = Ck e^{kz} \cos\sigma t \sin kx \quad (5.35)$$

速度大小为 $V = \sqrt{u^2 + w^2} = a\sigma e^{kz} \cos\sigma t$, 这里已用关系式 $Ck = C\sigma^2/g = a\sigma$ 进行了代换。式(5.35)表明, 驻波中某一时刻相同高度 z 处流体质点的合速度值相等。

有了速度场, 即可求出流线, 由流线微分方程可得

$$\frac{dx}{\cos kx} = \frac{dz}{\sin kx}$$

积分得

$$e^{kz} \cos kx = \text{常数} \quad (5.36)$$

这就是驻波的流线族方程。其实, 也可由平面不可压缩条件, 先求出流函数

$$\psi = Ce^{kz} \cos\sigma t \cos kx$$

取 $\psi = \text{常数}$, 同样可得流线族方程。

这里要指出, 流线方程中不含时间, 说明流线形状不随时间变化, 所以, 流体质点的运动迹线与流线重合, 如图 5.5 所示。但这里是非定常的波动, 流体质点并不总是沿着流线一个方向移动, 而是在相应的一小段上, 如在平衡位置附近做振动。流线的形状虽不随时间变化, 但不同时刻, 流体质点运动方向可以不同。

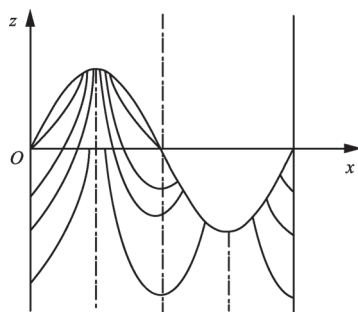


图 5.5 驻波中的流线

在小振幅波假定下, 流体质点在平衡位置附近振动的路径很短, 其轨迹可近似当作一小段直线, 它与流线相切, 现证明如下。

为了求轨迹方程, 需要采用拉格朗日表达式。由于确定质点在波动中偏离其平衡位置 (x_0, z_0) 很小, 因此, 速度分量式中的 (x, z) 可近似地用 (x_0, z_0) 代换, 即

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos kx_0 \cos \sigma t, \quad \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin kx_0 \cos \sigma t$$

积分得

$$x = x_0 + a e^{kz_0} \cos kx_0 \sin \sigma t, \quad z = z_0 + a e^{kz_0} \sin kx_0 \sin \sigma t \quad (5.37)$$

这是一个振动的参数方程,两个积分常数就是振动的平衡位置,实际上平衡位置 (x_0, z_0) 可作为质点标志,消去 t ,可得轨迹方程:

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} kx_0$$

这是一个直线方程,表示流体质点沿斜率为 $\operatorname{tg} kx_0$ 的直线做振动。这个斜率随坐标 x_0 而变化,在节点处 $x_0 = n\pi/k$,则 $\operatorname{tg} kx_0 = 0$,流体质点沿水平直线做振动(注意,不是静止不动);在波腹处 $x_0 = (2m + 1)\pi/(2k)$,则 $\operatorname{tg} kx_0 \rightarrow \infty$,流体质点沿竖直方向做振动,如图5.6所示。

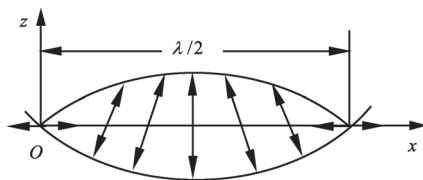


图 5.6 驻波中的质点运动轨迹

再来分析一下流体质点的振幅与其所在深度之关系。因为振幅是质点从平衡位置经 $T/4$ 所移动之距离,故

$$A = \int_0^{T/4} V dt = \int_0^{\pi/2\sigma} a e^{kz_0} \cos \sigma t dt = a e^{kz_0}$$

式中,流体质点的合速度近似取作 $V = a\sigma e^{kz_0} \cos \sigma t$ 。若平衡位置在表面 $z_0 = 0$ 处,则 $A = a e^0 = a$;若平衡位置在深度 $z_0 = -\lambda$ 处,则 $A = a e^{-2\pi} \approx a/535$;若平衡位置在无限深处 $z_0 \rightarrow -\infty$,则 $A = a e^{kz_0} \rightarrow 0$ 。

由上述讨论可知,流体质点的振幅随其平衡位置加深而很快减小,说明波动现象主要在表面附近,这就是表面波的特点。

最后讨论驻波中的压强。将速度势代入拉格朗日积分(5.20)得压强场为

$$p = p_0 - \rho g z + \rho a g e^{kz} \sin \sigma t \sin kx \quad (5.38)$$

它表明了某时刻 t 在某一空间点 (x, z) 处的压强分布,即 $p = p(x, z, t)$ 。如果要研究一个确定流体质点压强随时间的变化,可将上式末项中 (x, z) 用质点平衡位置 (x_0, z_0) 代替,而将 $-\rho g z$ 中的 z 用轨迹方程(5.37)中 z 代入。于是近似得到

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -g(z_0 + a e^{kz_0} \sin \sigma t \sin kx_0) + C \sigma e^{kz_0} \sin \sigma t \sin kx_0 = -g z_0$$

或

$$p = p_0 - \rho g z_0 \quad (5.39)$$

上式是确定流体质点压强的表示式, z_0 是平衡位置的铅直坐标,也就是它的标志, p_0 是自由面上的压强。此式表明,任一确定质点在振动过程中,压强都保持不变,

都等于其平衡位置处的压强。平衡位置铅直坐标相等的所有流体质点,压强都相等。

以上是对无限深流体速度势 ϕ 的叠加单元 ϕ_3 所表示的流动进行的分析,其他叠加单元所表示的运动与 ϕ_3 类似,都代表平面驻波,只是它们的位相不同而已。

5.3.4 行进波

仍以无限深流体为例,研究不可压缩理想流体平面重力表面波的另一种典型波动——行进波。容易证明,平面波速度势式(5.29)中的四个叠加单元中,任意两个相加,可能是驻波(如 $\phi_3 + \phi_1$),也可能是行进波(如 $\phi_3 - \phi_2$),这要由被叠加的两驻波之间的位相关系而定,现在讨论后一种情况。

对无限深流体,令速度势叠加单元中 $C''' = C'' = C$,使

$$\phi = \phi_3 - \phi_2 = Ce^{kz}(\sin kx \cos \sigma t - \cos kx \sin \sigma t) = Ce^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.40)$$

类似于对驻波的分析方法,先证明上式代表行进波,再进一步讨论速度和压强分布。

首先分析波轮廓形状。将上式代入自由面上的动力学边界条件(5.21),得到

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{C\sigma}{g} \cos(kx - \sigma t) = a \cos(kx - \sigma t) \quad (5.41)$$

这就是波轮廓方程。可见,波高随时间和空间呈周期性变化,为余弦波形。式中, $a = C\sigma/g$ 为波幅。由方程(5.41)可知,波节点处($\zeta = 0$)的位置坐标应满足

$$kx - \sigma t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{或} \quad x = \frac{\sigma t}{k} + \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由此可见,波节点位置随时间变化,因此,它是行进波。波节点的移动速度为

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma}{k}$$

波节点以此速度沿 x 轴正方向移动。事实上,对于波峰(谷)或其他固定位相点也可做同样推导而得出一致的结果。也就是说,由式(5.40)表示的 ϕ 所确定的整个波都是以同一速度 U 沿 x 轴正向移动。速度 U 就是行进波的传播速度(简称波速或相速)。

由波轮廓方程可以看出,某一时刻(t 固定),当位置坐标 x 增加 $2\pi/k$ (即 kx 增加 2π)时,波高 ζ 数值相等,因此,波长为 $\lambda = 2\pi/k$ 。若考虑某一固定空间点(x 不变)处,当时间 t 增加 $2\pi/\sigma$ 时,波高 ζ 数值也相同,说明质点振动的周期为 $T = 2\pi/\sigma$ 。

现在分析频率 σ 和波长 λ 之间的关系。将速度势表达式(5.40)代入自由面上的运动学条件(5.15)式,得

$$\sigma^2 = kg \quad (5.42)$$

它与无限深流体平面驻波的结果一致。事实上,直接将无限深平面波之特解 ϕ 代入,也可得到同样结果。

由上述讨论,无限深流体行进波的波速公式还可以表示为

$$U = \frac{\sigma}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{或} \quad U = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (5.43)$$

应当注意,所谓行进波传播速度,只是指波形(如波节点或波腹点)的移动速度,而不是流体质点的运动速度。流体质点只在其平衡位置附近振动。下面具体讨论行进波中流体质点的运动情况。

首先求速度场,由 ϕ 的表达式可得速度场为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ck e^{kz} \cos(kx - \sigma t), \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ck e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.44)$$

速度大小为 $V = \sqrt{u^2 + w^2} = Ck e^{kz}$, 因为 $Ck = a\sigma$, 所以 $V = a\sigma e^{kz}$ 。

流线微分方程为

$$\frac{dx}{\cos(kx - \sigma t)} = \frac{dz}{\sin(kx - \sigma t)}$$

积分得流线族方程为

$$e^{kz} \cos(kx - \sigma t) = \text{常数}$$

或者先求出流函数 $\psi(x, t)$, 再令 $\psi = \text{常数}$, 也可得到相同的结果。由流线族方程可知, 对某一确定时刻 t , 行进波与驻波的流线形状相同, 见图 5.7, 但行进波流线方程中含时刻 t , 流线形状不定常, 流线与迹线不相重合。

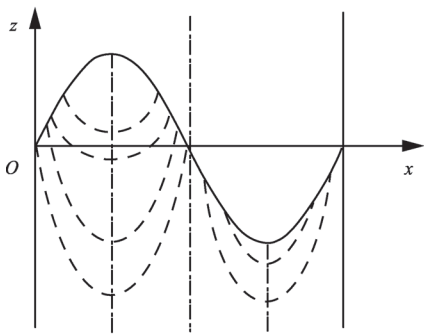


图 5.7 行进波流线图

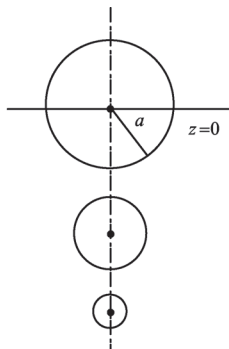


图 5.8 无限深行进波中质点运动轨迹

为了求迹线,像讨论驻波一样,由于质点只在平衡位置附近做微振动,因此,考虑确定的质点时,其速度表达式中的瞬时位置 (x, z) 可用平衡位置 (x_0, z_0) 近似代替,即

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t), \quad \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t)$$

积分得流体质点的迹线参数方程为

$$x = x_0 - a e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t), \quad z = z_0 + a e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t)$$

或消去 t , 得

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = (ae^{kz_0})^2 = r^2 \quad (5.45)$$

表明流体质点的近似轨迹是以平衡位置 (x_0, z_0) 为圆心, 以 $r = ae^{kz_0}$ 为半径的圆。显然, 在自由面上 ($z_0 = 0$), 圆的半径 $r_0 = a$ (波幅) 为最大值。随着深度增加, 圆的半径很快减小, 例如深度为 $z_0 = -\lambda$ 处, 流体质点的轨迹圆半径 $r \approx a/535$, 也就是说, 在自由面以下深度为一个波长的流体质点的轨迹圆半径, 只有自由面上质点的 $1/535$ 。而在无限深处, 则 $r \rightarrow 0$, 即流体质点不动, 如图 5.8 所示。

质点沿轨迹圆运动的速度大小近似为

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = a\sigma e^{kz_0} = r\sigma$$

可见, 质点以角速度 σ 绕平衡位置 (x_0, z_0) 做圆运动, 由于小振幅波假设, $r \ll a$ 是小量, 故波动引起的质点速度 V 也是小量。

质点做圆运动的方向是逆时针还是顺时针, 现以右行波为例, 设轨迹圆心 $M_0(x_0, z_0)$ 到质点位置 $M(x, z)$ 的连线与 z 轴负方向的夹角为 θ , 见图 5.9。

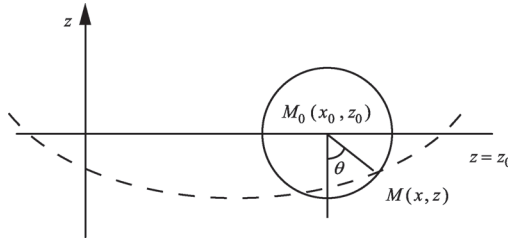


图 5.9 行进波中质点运动方向

由于

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x - x_0}{z - z_0} = \operatorname{tg}(kx_0 - \sigma t)$$

可见, 当 t 增加时 θ 减小, 即质点沿轨迹圆做顺时针运动。由此更清楚地看出, 质点运动与波传播速度之间的区别和联系。正是由于各个流体质点在轨迹圆的不同位置上做圆运动 (这里是顺时针), 而从整体上看构成一个右行波。图 5.10 中显示了不同时刻各流体质点在轨迹圆上的位置, 可看出质点运动与波移动的关系。还可以指出, 质点运动与波传播不仅概念上不同, 而且两者速度大小也不一样, 两者之比为

$$\frac{V}{U} = \frac{\sigma r}{\sigma/k} = \frac{r}{\lambda} 2\pi = \frac{a}{\lambda} e^{kz_0} 2\pi$$

由小振幅波假设 $a \ll \lambda$, 因此, 必有 $V \ll U$ 。

最后讨论无限深行进波中的压强。与驻波的讨论方法类似, 由行进波速度势可求得其压强场。将速度势表达式 (5.40) 代入式 (5.20), 经简单整理, 有

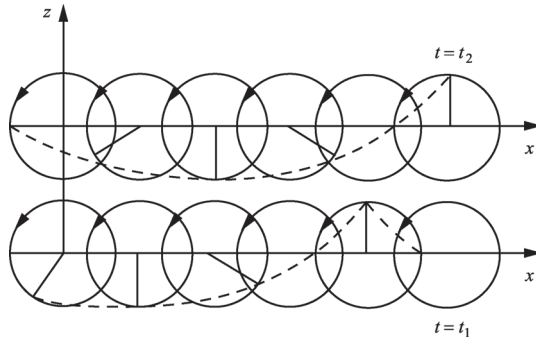


图 5.10 行进波与质点运动的关系

$$p = p_0 - \rho g z + \rho a g e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.46)$$

若要求某确定流体质点的压强,将上式右端第三项的 (x, z) 用 (x_0, z_0) 代替,第二项中的 z 用轨迹方程中的 z 代入,可近似得

$$p = p_0 - \rho g z_0 \quad (5.47)$$

可见,平衡位置铅直坐标为 z_0 的流体质点,在做圆运动时压强保持不变,等于平衡位置处的静压强。并且, z_0 坐标相等的各流体质点在运动中的压强都相等,构成等压面,这种流体内部的等压面称为次波面。可以设想,若把其上部流体层去掉,代之以某等值压强,并不影响余下流体的波动。

由前面讨论可知,分析无旋波动,速度势是一个基本物理量。可以直接利用分离变量法求解拉普拉斯方程得到 ϕ 的特解,并由底部条件定出不同深度(无限深或有限深)时的 ϕ 形式。实际上,因为这里只讨论周期性的波动解,所以也可以直接假设一个周期函数 ϕ 的形式解,再利用基本方程和边界条件来确定它的具体形式。

5.4 波群和群速度

前面讨论的是具有单一确定波长 λ (或波数 k)的等幅无穷波列,或者波长相同的波之叠加(结果仍是单一波长的等幅波列)。这种波在传播过程中波形保持不变。现在要研究波长和周期(或者说波速和频率)稍有不同的波的叠加。如果其波速与波长无关(例如声波),此两列波传播速度一样,彼此没有相对运动,因此,合成波形状在传播过程中不会发生变化(并以同样速度传播),但已不再是等幅波列,而是一个不等幅波列。例如,物理学中讨论的两个频率相近的音叉振动所形成的“拍”,就是这种情形。接下来进一步讨论,如果被合成的两列波(称之为单波)的波速与波长具有相关性,则它们的传播速度不相等,彼此有相对运动,叠加起来的合成波形状为不等幅波列,在向前传播过程中将不能保持原来的样子,而要不断地发生变化。不等幅波列的波形包

迹线(或称轮廓线)把合成波中的个别波(指合成波形中的每个波长段)按群划分,称之为波群。合成波向前传播时,波群的传播速度叫作群速度。它与波的传播速度并不一定相等,后面将看到,波动的能量正是以群速度向前传递的,因而,波群速是反映波动动力学特性的一个重要物理量。

5.4.1 波幅同、波长或频率差很小的两列单波叠加

设两列单波的速度势分别为

$$\phi_1 = \frac{ag}{\sigma_1} e^{kz} \sin(k_1 x - \sigma_1 t), \quad \phi_2 = \frac{ag}{\sigma_2} e^{kz} \sin(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (5.48)$$

式中, k_1 与 k_2 , σ_1 与 σ_2 相差很小。它们的波形分别为

$$\zeta_1 = a \cos(k_1 x - \sigma_1 t), \quad \zeta_2 = a \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (5.49)$$

合成波形为

$$\begin{aligned} \zeta^* &= \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}t\right) \\ &= 2a \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \sigma}{2}t\right) \cos(\bar{k}x - \bar{\sigma}t) \\ &= A(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\sigma}t) \end{aligned} \quad (5.50)$$

式中, $k_1 - k_2 = \Delta k$, $\sigma_1 - \sigma_2 = \Delta \sigma$, 均为小量, 而平均值 $\frac{(k_1 + k_2)}{2} = \bar{k}$, $\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} = \bar{\sigma}$ 与单波的波数(k_1 或 k_2) 及圆频率(σ_1 或 σ_2) 都相差很小。式(5.50)就是合成波的自由面方程。

5.4.2 合成波波形和波幅

(1) 合成波波形

由式(5.50)可知, 合成波形 ζ^* 可看作是以

$$A(x, t) = 2a \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \sigma}{2}t\right) \quad (5.51)$$

为波幅的余弦波, 其波数 \bar{k} 及圆频率 $\bar{\sigma}$ 都近似于单波的波数及圆频率, 因此, 合成波的传播速度为

$$U = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{k}} \quad (5.52)$$

近似等于两个单波的波速(图 5.11)。

(2) 合成波幅

式(5.51)表示合成波幅 $A(x, t)$ 不是一个固定常数, 它是随时间和空间呈周期性变化的。或者说, 其振幅也是呈波形变化的。图 5.11 表示某一时刻的合成波形 ζ^* ,

它是一个不等幅波列,即其中每一个个别波的振幅是不同的。不等幅波形的包迹线把合成波的个别波进行分组,每一组波就称为一个波群。包迹线的方程就是表达式(5.51)。它也是一个行进波,其波幅为 $2a$ 、波数为 $\Delta k/2$ 、圆频率为 $\Delta\sigma/2$ 、波长为 $2\pi/(\Delta k/2)$,半波长 $\lambda^*/2 = 2\pi/\Delta k$,表示两个邻近波群最大波幅之间的距离,也即一个波群所占的空间距离。由于 Δk 很小,因此 λ^* 很大。可见,波包迹线的空间变化平缓,一个波群内可包含若干个个别波。

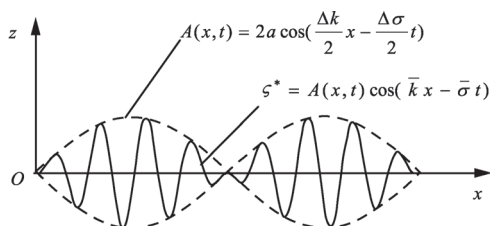


图 5.11 合成波

5.4.3 群速度

合成波包迹线的移动速度即群速度,可表示为

$$U^* = \frac{\Delta\sigma/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \approx \frac{d\sigma}{dk} \quad (5.53)$$

式中,用微商近似地代替差值。根据波动的频散关系,即可求出合成波的群速度。或者,利用关系式 $U = \sigma/k$ 和 $k = 2\pi/\lambda$,可以把群速度公式进一步改写为

$$U^* = \frac{d\sigma}{dk} = U + k \frac{dU}{dk} = U - \lambda \frac{dU}{d\lambda} \quad (5.54)$$

这就是群速度的瑞利公式,它反映了群速度 U^* 与波速 U 之间的关系。

因此,只要给出波速与波长的关系,便可分析群速度与波速的关系,即波包迹线与它所包含的个别波之间的相对运动关系。可分为以下两种情况讨论。

(1) 若波速 U 与波长 λ 无关,则 $dU/d\lambda = 0, U^* = U$ 。群速度与合成波速度相等,即波包迹线与个别波之间没有相对运动,整个合成波保持形状不变地向前传播。

(2) 若波速 U 与波长 λ 有关,则 $dU/d\lambda \neq 0, U^* \neq U$ 。波包迹线与其中的个别波速度不相等,即个别波要相对于波包迹线移动,此时个别波的波幅在运动过程中发生变化,导致合成波在向前传播时形状不断改变。

例如,无限深水域中的行进波,频散关系为 $\sigma^2 = kg$,波速 $U = \sigma/k = \sqrt{g/k}$,因此,群速度为

$$U^* = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{U}{2}$$

也就是说,它的群速度比波速小,波群中的个别波要相对波群以 $U - U^* = U/2$ 的速度运动;或者说,当波群向前移动时,组成波群的个别波将在波群中穿行而过,并不断改变自己的波幅。

由于波动能量与波幅平方成正比,当波群中的各个别波穿行而改变波幅时,它们之间必发生能量的交换和再分配。又由于波群的位置是合成波的最大波幅所在处,故群速度也就是波动能量传递速度。这一点将在后面证明。

最后,介绍波的频散和能量频散的概念。

实际的波总是占据有限空间而不是无穷波列,例如只有一个凸起波峰的孤立波。运用傅里叶分析原理,可将它看成是由许多不同波长与频率的谐波叠加的合成波。如果在某一波长附近取两列单波进行分析,即前面讲的波群情况。假如这些谐波的波速和波长无关,那么整个孤波就能保持形状不变地向前传播。假如谐波的波速和波长有关($U = U(k)$ 或 $\sigma = \sigma(k)$),那么它们在传播过程中有快有慢,会逐渐分散开。结果,原先的孤波在传播中将发生形变而逐渐伸展开来,这种现象叫作波的频散(或波的色散,犹如白光透过三棱镜时发生色散)。因此,把相速与波长有关的波叫作频散波,而频散方程 $\sigma = \sigma(k)$ 叫作频散关系式。

再从能量观点看,由于波动能量与波幅有关,开始孤波的能量集中于凸起的有限区域内。当它频散时,波轮廓线逐渐伸展,幅度也逐渐减小,波动能量也向外扩散,这就叫能量的频散。最后,其能量频散至整个区域,波动也逐渐消失。

5.5 波动能量及其传递

本节研究不可压缩理想流体波动的能量以及波动能量传递的速度,并证明波动能量的传递速度就是群速度。

5.5.1 波动能量

所谓波动的能量,是指波动中所有流体质点的机械能——动能与重力势能之总和。由于波动在空间呈周期性分布,因此只需讨论一个波长内的能量。

(1) 波动势能

波动的势能是由于波动中流体质点离开平衡位置,其铅直坐标发生变化而产生的。若取平衡位置($\zeta = 0$)作为波动势能的零值参考点,见图 5.12,取宽为 dx 的小柱体,它的质量为 $dm = \rho g dx$,重心高度为 $\zeta/2$,其势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 dx$$

而一个波长内的总势能为

$$E_p = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 dx \quad (5.55)$$

这就是波动势能的计算公式。当波形 ζ (或速度势 ϕ) 已知时,即可计算一个波长内的重力势能。

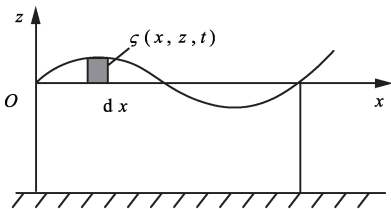


图 5.12 波动势能的计算

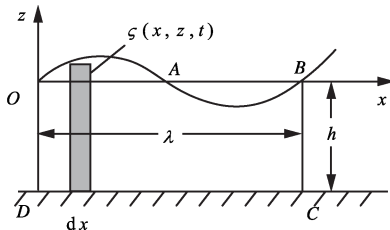


图 5.13 波动动能的计算

(2) 波动动能

由于波动中流体质点具有速度,因而具有动能。考虑到波动的无旋性 $\mathbf{V} = \nabla \phi$, 且流体不可压缩 $\nabla^2 \phi = 0$, 可得体积为 τ 的流体系统的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \int_\tau \frac{V^2}{2} \rho d\tau = \frac{\rho}{2} \int_\tau \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\tau = \frac{\rho}{2} \int_\tau \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) d\tau \\ &= \frac{\rho}{2} \oint_\sigma \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{\rho}{2} \oint_\sigma \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (5.56)$$

这就是不可压缩流体无旋运动动能的一般计算公式。对于平面问题,上式改写为

$$E_k = \frac{\rho}{2} \oint_L \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (5.57)$$

式中, L 是流体的周界, \mathbf{n} 是其外法向单位矢。

考虑一个波长范围内的流体,如图 5.13 所示,它的周界线有四部分:上界(自由面)、下界(底面)及左右两条侧边界。将闭合线积分拆成四部分,则有

$$\oint_L \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = \left(\int_{\text{上}} + \int_{\text{下}} + \int_{\text{左}} + \int_{\text{右}} \right) \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl$$

对于下界底面,有 $\partial \phi / \partial n = 0$, 故 $\int_{\text{下}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = 0$, 而左右两条侧边界上物理量完全对应

相等,但两者外法向方向相反,因此,两条侧边界上的积分等值反号,故 $\left(\int_{\text{左}} + \int_{\text{右}} \right) \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = 0$, 只剩下沿自由面剖线的曲线积分,即

$$E_k = \frac{\rho}{2} \oint_{\text{自由面}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (5.58)$$

考虑到小振幅波,假设波面与静止表面相差无几,所以可近似取

$$dl \approx dx, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{z=\zeta} \approx \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

于是得到

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} dx \quad (5.59)$$

这就是波动动能在一个波长范围内的计算公式。可见,只要给出速度势 ϕ 即可求得动能 E_k 。

下面以无限深的驻波和行进波为例计算波动的势能和动能,并分析波动能量的有关性质。

(3) 驻波与行进波能量计算

考虑无限深驻波情况。设其速度势和波形分别为

$$\phi = Ce^{kz} \cos \sigma t \sin kx \quad \text{和} \quad \zeta = a \sin \sigma t \sin kx$$

利用式(5.55)及(5.59),计算得到的势能和动能分别为

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 dx = \frac{1}{2} \rho g a^2 \sin^2 \sigma t \int_0^\lambda \sin^2 kx dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \sin^2 \sigma t \quad (5.60)$$

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} dx = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda C^2 k \cos^2 \sigma t \sin^2 kx dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \cos^2 \sigma t \quad (5.61)$$

因此,总的机械能为

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \sin^2 \sigma t + \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \cos^2 \sigma t = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \quad (5.62)$$

可见,驻波运动的能量与波幅平方成正比,其动能和势能都随时间变化,但总和保持不变,且为常数。表明驻波的动能和势能是互相转换的。

考虑无限深行进波情况。设其速度势和波形分别为

$$\phi = Ce^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad \text{和} \quad \zeta = a \cos(kx - \sigma t)$$

则势能和动能分别为

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda a^2 \cos^2(kx - \sigma t) dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \quad (5.63)$$

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} dx = \frac{\rho}{2} C^2 k \int_0^\lambda \sin^2 kx dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \quad (5.64)$$

总机械能为

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda + \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda = \frac{1}{2} \rho g a^2 \lambda \quad (5.65)$$

由此可见,行进波的能量也与波幅平方成正比,其总能量为一常数,且动能与势能相等,都等于总能量的一半。

对于有限深的驻波和行进波,其波动能量与无限深结果完全一样,读者可自行证明。

5.5.2 波动能量传递

如前所述,行进波中的流体质点并不随波前进,向前传播的只是运动的形式,而运动形式的传播必定伴有能量的传递,波动能量是以波的群速传播的。这个结论不仅对于存在波群的合成波成立,而且对于一系列单波也是成立的。下面以无限深流体中的行进波为例证明之。

前面已经求得了每个波长内行进波的总能量。当波动能量以某速度 V_E 向前传播时,则对一固定的空间竖直剖面来说,单位时间内就会有确定的能量穿过,定义为能流率。而这种从剖面左侧向右侧的能量传递,又是通过质点之间做功形式进行的。也就是说,某时刻从左向右穿过剖面的能流率,就等于该剖面左侧对右侧的做功率。考虑到波动是一个不定常的周期运动,不同时刻,这种“做功率”不一样,因此,可对一个周期做时间平均,求得平均的“做功率”,这样即可推算出能量的传递速度,见图 5.14。

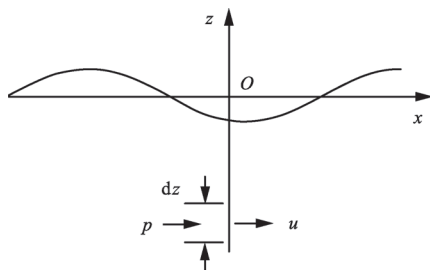


图 5.14 波动能量的传递

设无限深流体中行进波的速度势为

$$\phi = Ce^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

则速度的 x 分量为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ck e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$

压强为

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = p_0 - \rho g z + \rho C \sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$

现在计算竖直平面左侧对右侧的做功率。若将 dz 高度上的做功率记为 $pu dz$,则整个竖直平面上的做功率为 $\int_{-\infty}^0 pu dz$,其中积分上限波面 $z = \zeta$ 已近似取为 $z = 0$ 。因此,压力在一个周期 T 内所做的平均功率为

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^0 pu dz dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^0 [(p_0 - \rho g z) Ck e^{kz} \cos(kx - \sigma t) + \rho C^2 k \sigma e^{2kz} \cos^2(kx - \sigma t)] dz dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^0 \left(\rho C^2 k \sigma e^{2kz} \frac{T}{2} \right) dz \\
 &= \frac{1}{4} \rho C^2 \sigma = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{U}{2}
 \end{aligned}$$

这就是固定空间竖直平面左侧对右侧所做的平均功率,也就是波动能量穿过竖直平面的能流率。行进波在一个波长的总能量为 $E = \rho g a^2 \lambda / 2$, 则单位长度上的能量 $e = E / \lambda = \rho g a^2 / 2$ 。如果能量传递速度为 V_E , 则单位时间穿过竖直平面的能量为

$$eV_E = \frac{1}{2} \rho g a^2 V_E$$

将此式与平均功率 N 对比,可知能量传递速度为

$$V_E = \frac{U}{2} = U^*$$

注意,这里的 $U/2$ 正是无限深行进波的群速度 U^* , 因此,波动能量是以群速度 U^* 传递的。

对于有限深行进波,可做类似的证明,结论是一样的,即其能量是以有限深行进波的群速度传播的。对于浅水波,其能量是以浅水波的群速度(即等于浅水波波速)传递的。

总之,波动能量是以相应的群速度传递的。这个结论,对于具有波群的合成波是容易理解的,因为能量集中于具有最大波幅的波群处,但对于单波的理解现仍以无限深行进波为例说明之。如图 5.15 所示,考察竖直剖面两侧的邻近质点 A 与 B 在一个周期内能量的变化情况,以分析两质点之间通过压力做功而进行的能量传递。质点 A 和 B 的运动轨迹都是圆。在一个周期内,质点 A 从左侧穿出剖面到右侧,又从右侧穿入剖面回至左侧。在这两次穿越剖面过程中,其做等速圆周运动,动能保持不变,但失去了势能。同样,质点 B 在一个周期内也两次穿越剖面,得到了势能。由此可见,剖面左右两侧的邻近质点,在一个周期内通过复杂的压力做功,传递了自己的势能。即在一个周期内,波向前移动了一个波长,其势能也向前传递一个波长。也就是说,波动势能以波速 U 传递。由于行进波的势能是总能量的一半,所以波动总能量以 $U/2$ 速度传递,也就是以群速度传递。

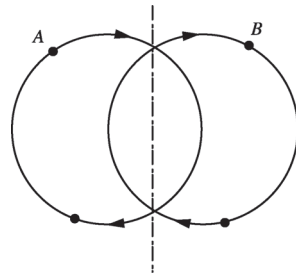


图 5.15 波动能量以群速度传递

5.6 浅水长波

微分形式的动量方程是一个非线性方程,要直接求解它是比较困难的。但对于无旋运动,常常可以用其首次积分——拉格朗日积分来代替,从而避免了非线性问题。前面对无旋运动的研究就是采用了这种方法。然而,在一般情况下,必须面对原始形式的微分动量方程。此时,如何处理非线性问题就成为一个关键。常用的一个方法就是所谓的小扰动线性化方法。即在小扰动假设前提下,将非线性方程进行线性化近似处理。本节通过研究浅水长波以介绍这种方法。

5.6.1 浅水长波基本假设

回顾前面所讨论的重力表面波,实际上运用了五个假设条件,即流体是理想、不可压缩的,外力只有重力,波动是无旋的,并且只限于小振幅波。这里讨论的浅水长波仍然假设流体是理想、不可压缩的,外力或者只有重力,或者除铅直方向有重力外,在水平方向还可同时有质量力

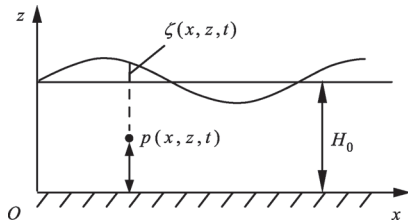


图 5.16 浅水长波

$X(x, t)$,它只与水平坐标 x 及时刻 t 有关。此外,仍然局限于讨论小振幅波(即波幅 a 很小)。前述四个假设与重力表面波类似,所不同的是,这里不采用无旋波条件,而代之以“浅水长波”的假设。所谓浅水,是指未扰动时的水深 H_0 很小,长波则是指其波长 λ 很大——这是相对于水深而言的,浅水长波指的是 $H_0 \ll \lambda$ (图 5.16),因此,小振幅与浅水长波的条件合并为

$$a \ll H_0 \ll \lambda$$

因为质点沿 z 方向的速度 w 变化很缓慢,铅直方向加速度为高阶小量,令

$$\frac{dw}{dt} = 0$$

为补充假设,该补充假设的物理基础就在于流体运动在铅直方向变化尺度很小,而在水平方向无界。

5.6.2 浅水长波基本方程

考虑不可压缩无黏流体运动,其基本方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

现在根据浅水长波假设来改写这组方程。先将动量方程写为分量形式,即

$$\frac{du}{dt} = X(x, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.66)$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (5.67)$$

这里用到了补充假设。将式(5.67)对 z 积分,并利用自由面压强为 p_0 的条件,得

$$p^* = p_0 + \rho g(H_0 + \zeta - z) = p_0 + \rho g(H - z) \quad (5.68)$$

式中, $H = H_0 + \zeta$ 为有扰动时的水深。式(5.68)表示铅直方向压强分布按静压分布。

压强沿水平方向的梯度为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H}{\partial x}$$

由于 $\zeta = \zeta(x, t)$, 从而 $H = H(x, t)$ 。所以,上式表明压强沿水平方向的变化与 z 无关,在各层高度上都是一样,并且压强梯度可用水面的坡度来表示。将上式代入方程(5.66),得

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + X(x, t) \quad (5.69)$$

这就是浅水长波沿 x 方向的动量方程,

现在利用方程(5.69)分析浅水长波中流体质点的运动情况。该方程表明,流体质点沿 x 方向的加速度与 z 无关,即

$$\frac{du}{dt} = f_1(x, t)$$

式中, $f_1(x, t)$ 是与 z 无关的函数,表明处于同一铅直面上的各质点的水平加速度都相同。如果开始时同一铅直面上各点的水平速度 $u|_{t=0}$ 都相同,则以后任一时刻,它们的水平速度也相同,即与深度 z 无关,如图 5.17 所示,即

$$u = u(x, t) \quad (5.70)$$

但是,同一铅直面上各点的铅直方向速度 w 并不一样大。由连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

可以求出铅直速度 w 。因为

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} = f_2(x, t)$$

式中, $f_2(x, t)$ 是与 z 无关的函数。此式对 z 积分得

$$w = f_2(x, t)z + C(x, t)$$

式中, $C(x, t)$ 为任意函数,利用下底部条件,即 $z=0$ 处, $w=0$, 有 $C(x, t)=0$, 所以

$$w = f_2(x, t)z \quad (5.71)$$

此式表明,铅直速度随高度 z 呈线性分布。

式(5.70)和(5.71)就是浅水长波传播的速度场。由此可见,这种波动并非局限于表面附近,并且也不是无旋的。

下面讨论浅水长波的连续性方程。

在 x 处取 δx 宽度的一个竖直柱体元作为研究对象,它由左、右固定侧面,下底壁及顶部自由面围成,见图 5.18。根据质量守恒定律,左、右侧面的总质量净流出率为 $\partial(\rho u H)/\partial x \delta x$,应等于柱体元内质量的减少率 $-\partial(\rho H \delta x)/\partial t$,因此,有

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H)$$

因为流体不可压缩,所以将引起液面高度变化,有

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.72)$$

这就是以水深 H 表示的连续性方程。式(5.69)和(5.72)就是浅水长波的基本方程。

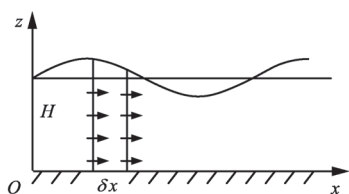


图 5.17 浅水长波质点运动速度

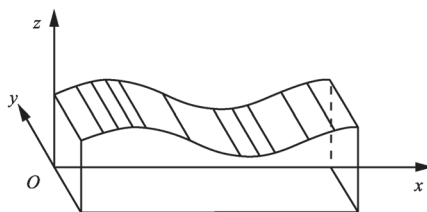


图 5.18 浅水长波连续性方程推导

5.6.3 浅水长波基本方程求解——小扰动线性化近似

上述方程组仍然是非线性的,可利用波的小振幅假设,对它做近似处理,使其变为线性方程。为了简单起见,设水平质量力为零,即 $X(x, t) = 0$,考虑未受扰动时的流体为静止的且无平流的情况。

此时 u 就是扰动引起的速度分量,故是小量,其偏导数 $\partial u/\partial x$ 也是小量。动量方程可化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x}$$

左端第二项为高级小量,可以略去。其右端

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(H_0 + \zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

从而得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.73)$$

同理,将 $H = H_0 + \zeta$ 代入连续性方程(5.72)中,考虑到 H_0 为常量, u 和 ζ 及 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial \zeta/\partial x$ 都是小量,略去高阶小量后得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.74)$$

所以,无平流时的基本方程为关于 ζ 和 u 的一组线性方程,从这组方程很容易理解流体波动的物理机制。例如由初始波面 $\partial \zeta/\partial x \neq 0$,通过重力作用产生水平气压梯度力,引起水平加速度,使 $\partial u/\partial t \neq 0$,出现水平辐合辐散 $\partial u/\partial x \neq 0$ 。又由于流体不可压缩,势必引起水平高度变化 $\partial \zeta/\partial t \neq 0$ 。于是又反过来影响波面。如此反复,形成波动。

现在再讨论线性方程(5.73)和(5.74)的求解。因为只找波动解,故可设形式解为

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(kx - \sigma t)}, \quad u = u_0 e^{i(kx - \sigma t)}$$

式中, ζ_0 和 u_0 分别是它们的幅值。将形式解代入方程组得到求解 u_0 和 ζ_0 的一组代数方程:

$$-\sigma u_0 + gk\zeta_0 = 0, \quad H_0 k u_0 - \sigma \zeta_0 = 0$$

这就是本征值问题,要使 u_0 和 ζ_0 有非零解,由系数行列式必须为零,得

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = gH_0$$

则波速可写为

$$U = \frac{\sigma}{k} = \pm \sqrt{gH_0}$$

它代表是两个方向的行进波,波速只与水深 H_0 有关。也可直接将式(5.73)与(5.74)合并,消去 u 得到 ζ 的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{gH_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

可见,波速 $U = \pm \sqrt{gH_0}$ 。上述方程的一般解为 $\zeta = F(x \pm Ut)$,式中, F_1, F_2 为任意函数。 u 也有类似的解。

5.7 分层流与内波

密度随高度发生变化(分层结构)的流体,称为分层流体或层结流体。大气中由于上下层受热不均,温度、密度不同,海洋中由于上下层海水温度和含盐量的不同,其密度随高度的分布亦不均匀。所以,地球上的大气、海洋都是分层流体。如果流体的密度分层具有上轻下重的结构,称之为稳定层结。内波就是发生在密度层结稳定的

流体中的一种波动。本节讨论间断分层流体中的界面内波和连续分层流体中的重力内波。

5.7.1 界面内波

内波的一种最简单的形式是发生在两层密度不同、互不参混的流体界面处的波动,称之为界面内波。在海洋中,实际海水密度的变化都是连续的,但可以近似地把海洋中强跃层处的波动视为界面内波,它能解释很多的内波现象。

这里讨论两种密度各自均匀、互不相混的理想不可压缩重力流体,在其界面上产生的平面行进波,如图 5.19 所示。

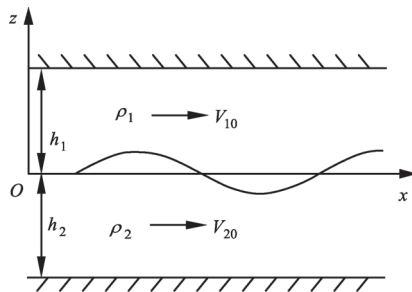


图 5.19 界面波

设两层流体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 上层与下层的流体厚度分别为 h_1 和 h_2 , 上下边界分别为两个无界平行刚壁, 并假设它们各自有 x 方向的水平速度 V_{10} 和 V_{20} 。取未受扰动时的水平分界面为 xy 平面, z 轴铅直向上。下面分析小振幅简谐界面波动的特性, 包括频散关系、界面内波的存在性和稳定性。

根据拉格朗日定理, 理想不可压缩重力流体的无旋运动具有保持性, 故而所讨论的波动是无旋的。为此, 在上层和下层流体运动分析中分别引入速度势 ϕ_1 和 ϕ_2 , 把速度势看成是由原先的水平速度势叠加一个波动部分。这样, 如果研究某一波长为 λ (或波数为 k) 的小振幅界面波:

$$\zeta = a \cos(kx - \sigma t) \quad (5.75)$$

那么, 可设上下两层流体速度势的形式解分别为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi'_1 + \phi''_1 = V_{10}x + C_1 \operatorname{ch}k(z - h_1) \sin(kx - \sigma t) \\ \phi_2 &= \phi'_2 + \phi''_2 = V_{20}x + C_2 \operatorname{ch}k(z + h_2) \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \quad (5.76)$$

式中, C_1, C_2 是两个待定常数。为了确定 C_1, C_2 和 σ 三个未知量, 需要有三个关系式。事实上, 在写出上述形式解时, 已经考虑了拉普拉斯方程和底部边界条件:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=h_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=-h_2} = 0$$

故只剩下分界面上的运动学条件和动力学条件未使用。

首先讨论分界面上的运动学条件。为书写方便, 将两种流体的速度势形式解 (5.76) 统一写成

$$\phi = \phi' + \phi''$$

式中, ϕ' 代表平流部分 (为一般量), ϕ'' 代表波动部分 (为小量), 对上层和下层中的流

体分别用脚标 1 和 2 表示。由于速度项中包含平流速度,故其平方项不能随意略去。由 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 知,速度场为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \frac{\partial \phi''}{\partial x} = V_0 + \frac{\partial \phi''}{\partial x}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{\partial \phi''}{\partial z} \approx \frac{\partial \phi''}{\partial z}$$

式中,水平速度 u 第一部分为一般量,第二部分为小量,而 w 为小量,所以

$$V^2 = u^2 + w^2 \approx V_0^2 + 2V_0 \frac{\partial \phi''}{\partial x} \quad (5.77)$$

上式已略去高阶小量 $(\partial \phi''/\partial x)^2$ 和 $(\partial \phi''/\partial z)^2$ 。

由于分界面是物质面,界面上的质点仍保持在界面上,故其铅直速度分量可写为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.78)$$

这就是分界面上运动学条件近似表达式,式中已略去高阶小量。式(5.78)对于界面处上下两种流体都适用。为了求得对两种流体的具体表达式,分别将它们的速度势 ϕ_1, ϕ_2 , 平流速度 V_{10}, V_{20} , 以及波面方程 ζ 代入式(5.78),经化简,上、下层流体在分界面上的运动学条件分别为

$$-C_1 k \text{sh} k h_1 = a(\sigma - V_{10} k) \quad (5.79)$$

$$C_2 k \text{sh} k h_2 = a(\sigma - V_{20} k) \quad (5.80)$$

其次讨论分界面上的动力学条件。将拉格朗日积分写为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V_0^2}{2} + V_0 \frac{\partial \phi''}{\partial x} + gz + \frac{p}{\rho} = G(t)$$

式中,速度平方项已用式(5.77)代入,略去了高阶小量。在分界面 $z = \zeta$ 处,若 $p = p_0$,则有

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=0} + \frac{V_0^2}{2} + V_0 \left.\frac{\partial \phi''}{\partial x}\right|_{z=0} + g\zeta + \frac{p_0}{\rho} = G(t)$$

此式对上下两种流体都适用。利用界面处两种流体的压强相等,即 $p_{01} = p_{02} = p_0$,消去 p_0 后整理得

$$\begin{aligned} \rho_1 G_1(t) - \rho_1 g \zeta - \frac{1}{2} \rho_1 V_{10}^2 - \rho_1 V_{10} \left.\frac{\partial \phi''_1}{\partial x}\right|_{z=0} - \rho_1 \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right|_{z=0} \\ = \rho_2 G_2(t) - \rho_2 g \zeta - \frac{1}{2} \rho_2 V_{20}^2 - \rho_2 V_{20} \left.\frac{\partial \phi''_2}{\partial x}\right|_{z=0} - \rho_2 \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right|_{z=0} \end{aligned}$$

将 ζ, ϕ_1, ϕ_2 及 ϕ''_1, ϕ''_2 代入上式,经整理得

$$\begin{aligned} \cos(kx - \sigma t)(\rho_2 g a - \rho_1 g a + \rho_2 V_{20} C_2 k \text{ch} k h_2 - \rho_1 V_{10} C_1 k \text{ch} k h_1 + \rho_1 C_1 \sigma \text{ch} k h_1 - \rho_2 C_2 \sigma \text{ch} k h_2) \\ = \rho_2 G_2(t) - \rho_1 G_1(t) + \frac{1}{2} \rho_1 V_{10}^2 - \frac{1}{2} \rho_2 V_{20}^2 \end{aligned}$$

上式右端仅为时间 t 的函数,而左端因子 $\cos(kx - \sigma t)$ 与坐标 x 有关,欲使此式成立,必须两端都等于零,亦即左端括号内等于零

$$\rho_1 C_1 \sigma \operatorname{ch} k h_1 (\sigma - V_{10} k) - \rho_1 g a = \rho_2 C_2 \sigma \operatorname{ch} k h_2 (\sigma - V_{20} k) - \rho_2 g a \quad (5.81)$$

上式即为分界面上的动力学条件。

由方程(5.79)、(5.80)和(5.81)消去 C_1, C_2 , 得到

$$\rho_1 \operatorname{cth} k h_1 (U - V_{10})^2 + \rho_2 \operatorname{cth} k h_2 (U - V_{20})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{k} \quad (5.82)$$

式中, $\rho_1, \rho_2, h_1, h_2, V_{10}, V_{20}$ 及 k 均为已知,故由该式可计算界面波传播速度 U 。进一步,可利用该式讨论界面波的存在与稳定性条件。

因式(5.82)左端总是正值,若存在界面波,必有 $\rho_2 > \rho_1$,即密度小的流体必须在上部,而密度较大的流体必须在下部,这就是界面波存在的必要条件。

为便于讨论,设两种流体深度均为无限深,即 $h_1 \rightarrow \infty, h_2 \rightarrow \infty$,则有 $\operatorname{cth} k h_1 = \operatorname{cth} k h_2 = 1$,式(5.82)可写成

$$\rho_1 (U - V_{10})^2 + \rho_2 (U - V_{20})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{k} \quad (5.83)$$

由此可解得波速

$$U = \frac{\rho_1 V_{10} + \rho_2 V_{20}}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{(\rho_2 + \rho_1) k} - \frac{\rho_1 \rho_2 (V_{20} - V_{10})^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}} = U_1 \pm U_2 \quad (5.84)$$

通常称 U_1 为波动的平流速度, U_2 为波动的动力速度。因为波速 U 为实数才有意义,因此要求根号内的值必须大于或等于零,即

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{(\rho_2 + \rho_1) k} \geq \frac{\rho_1 \rho_2 (V_{20} - V_{10})^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2} \quad \text{或} \quad k \leq \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2) g}{\rho_1 \rho_2 (V_{20} - V_{10})^2}$$

这就是界面波稳定性条件,即当 $\rho_1, \rho_2, V_{10}, V_{20}$ 给定后,波数 k 必须小于或等于某个特定值,界面波才能稳定。由于波长 $\lambda = 2\pi/k$,故要求波长 λ 必须大于某一特定值,界面波才能稳定;否则,界面波就一定不稳定。由此可见,对界面波来说,长波比短波更稳定。另外,由稳定性条件还可看出,当 $\rho_2 < \rho_1$ 时,即流体上重下轻,则界面波一定不稳定。

若上、下层流体的平流速度为零,即 $V_{10} = V_{20} = 0$,则界面波波速为

$$U = \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{(\rho_2 + \rho_1) k}}$$

如果上层流体 $\rho_1 = 0$,则进一步化为

$$U = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

上式就是无限深流体中表面波的传播速度。由于水的密度约是空气的 770 倍,所以讨论空气和水之间的界面波时,可不考虑空气的存在,将其作为表面波处理。

5.7.2 重力内波

实际流体中的密度是连续的,因此,内波不仅能在界面上产生,而且在流体内部处处都可能产生。表面波的恢复力主要为重力,故有表面重力波之称,而内波的恢复力为约化重力(即重力与浮力之差),简称为重力内波。由于内波的恢复力很弱,无论是它的传播速度还是由它引起水质点的运动都比表面波慢得多。

考虑不可压缩流体未受扰动时密度随高度的分布为 $\rho_0(z)$ 。设体积为 τ 的流体微团,在某扰动下由原平衡高度 z , 上升到达新高度 $z + \zeta$ 。该流体微团在新高度上受到的浮力为 $\tau\rho_0(z + \zeta)g$, 它本身的重量为 $\tau\rho_0(z)g$, 因此, 它受到的沿 z 方向的合力为 $\tau[\rho_0(z + \zeta) - \rho_0(z)]g$ 。当 ζ 很小时, 该合力可近似地写为 $\tau(d\rho_0/dz)\zeta g$, 若不计流体运动引起的压强变化, 该流体微团的运动方程为

$$\rho_0 \tau \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \tau \left(\frac{d\rho_0}{dz} \right) \zeta g \quad (5.85)$$

记

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}} \quad (5.86)$$

称为浮力频率, 又称 Brunt-Väisälä 频率。则方程(5.85)化为

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + N^2 \zeta = 0$$

若 $d\rho_0/dz < 0$, 上述方程的周期性振荡解为

$$\zeta = A_1 \cos Nt + A_2 \sin Nt \quad (5.87)$$

可见, 微团的位移与净浮力(重力与浮力的合力)总是反方向的, 微团在其平衡位置附近发生振荡, 其振荡圆频率为 N 。

下面建立重力内波的控制方程。考虑不可压缩及具有稳定层结 $d\rho_0/dz < 0$ 的分层流体, 其平衡状态满足静力平衡方程, 即

$$0 = -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} \quad (5.88)$$

当流体发生小扰动后, 用撇号“'”表示微扰动量, 于是有

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V}' \\ p = p_0 + p' & |p'| \ll p_0 \\ \rho = \rho_0 + \rho' & |\rho'| \ll \rho_0 \end{cases} \quad (5.89)$$

将上式代入欧拉方程, 略去高阶小量, 方程可简化为

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} = -\nabla' p + \rho' \mathbf{g} \quad (5.90)$$

根据不可压缩流体假设, 同样近似程度下, 其数学表达式可写为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \omega \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (5.91)$$

不可压缩流体的连续方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \quad (5.92)$$

方程(5.90)、(5.91)和(5.92)就是微扰动线性化的重力内波控制方程。

设波动形式的解为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ R \end{bmatrix} \exp[-i(\sigma t + kx + ly + mz)] \quad (5.93)$$

式中,扰动量(u', v', w', p', ρ')的撇号已去掉,大写字母(U, V, W, P, R)为对应扰动量的振幅,并取复常数。上式表示三维波动, k, l, m 分别为三个坐标方向的波数, $\mathbf{K} = ki + lj + mk$ 为波数矢量,即波动沿 \mathbf{K} 方向传播。

将式(5.93)代入式(5.90)、(5.91)和(5.92),可得

$$\begin{cases} i\sigma\rho_0 U = -ikP \\ i\sigma\rho_0 V = -ilP \\ i\sigma\rho_0 W = -imP + gR \\ -i\sigma R + \frac{d\rho_0}{dz} W = 0 \\ ikU + iV + imW = 0 \end{cases} \quad (5.94)$$

在上式中消去 U, V, W 后,可得关于 P 和 R 的两个联立方程:

$$\begin{cases} -i\left(\frac{k^2}{\rho_0} + \frac{l^2}{\rho_0}\right)P + i^2\sigma^2 m \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^{-1} R = 0 \\ -imP + \left[\rho_0\sigma^2 \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^{-1} + g\right]R = 0 \end{cases} \quad (5.95)$$

该齐次方程组有非零解的充要条件为其系数行列式等于零,经简化后得

$$\sigma = N \left(1 - \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}\right)^{1/2} \quad \text{或} \quad \sigma = N \frac{(K^2 - m^2)^{1/2}}{K} = N |\sin\theta| \quad (5.96)$$

式中, $K^2 = k^2 + l^2 + m^2$, θ 为等位相面法向(即波数矢 \mathbf{K} 方向)与 z 轴的交角。式(5.96)即重力内波的频率方程。由此式可知,分层流体中重力内波的圆频率 σ 以 N 为上限。重力内波的相速度公式则为

$$c = \frac{\sigma}{k} = N \frac{(K^2 - m^2)^{1/2}}{K^2} \quad (5.97)$$

上述分析仅给出线性重力内波的初步结果,有关非线性内波的研究尚处于不断

探索之中,感兴趣的读者可参考有关专著。

应用例

例 1 求无限深海面上浮标一分钟内上升下降 15 次的海洋表面波波长和传播速度

解: 根据题意,波动的周期为 $T = 4(\text{s})$ 。由无限深流体中波动的频散关系 $\sigma^2 = kg$, 即

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{\lambda}g$$

解得波长为

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{9.8 \times 4^2}{2 \times 3.14} \approx 24.97(\text{m})$$

根据定义,波的传播速度为

$$U = \frac{\lambda}{T} = \frac{24.97}{4} \approx 6.24(\text{m/s})$$

例 2 证明不可压缩理想流体在重力作用下表面波问题的解是唯一的

证明: 对于不可压缩理想流体在重力作用下的表面波问题,引入速度势 ϕ , 可以化为拉普拉斯方程混合问题的求解, 即

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{\text{固定边界}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \quad (\text{边界条件}) \\ \phi \Big|_{\substack{z=0 \\ t=0}} = F(x, y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\substack{z=0 \\ t=0}} = f(x, y) \quad (\text{初始条件}) \end{cases}$$

利用反证法: 设函数 ϕ_1 和 ϕ_2 同时满足上述方程组, 令 $\phi = \phi_1 - \phi_2$, 由于拉普拉斯方程及定解条件是线性的, 则函数 ϕ 不仅满足拉普拉斯方程及边界条件, 也满足初始条件:

$$\phi \Big|_{t=0, z=0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0, z=0} = 0$$

它表明流体既没有初始速度, 也没有初始波形。或者说, 开始时流体是静止不动的, 而且自由面又是水平面, 当然不能产生任何运动, 因此, 满足上述条件的 ϕ 代表流体的静止状态, 从而 $\phi = \text{常数}$, 即

$$\phi_1 - \phi_2 = \text{常数}$$

由此说明, ϕ_1 与 ϕ_2 至多差一个常数, 拉普拉斯方程混合问题的解是唯一的, 它们所代表的流体波动是完全相同的。

例3 有限深流体中驻波的波动特性与流动特性分析

解: 有限深流体重力表面波的速度势表达式(5.31)中的四个叠加单元, 每一个都代表驻波运动。下面以 $\phi = C \operatorname{ch}k(z+h) \cos\sigma t \sin kx$ 为例予以分析。

(1) 自由面形状和波幅: 将 ϕ 代入波轮廓方程(5.21), 得

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch}kh \sin\sigma t \sin kx = A(t) \sin kx$$

其节点位置固定不变, 显然这是驻波。波幅 $a = (C\sigma/g) \operatorname{ch}kh$, 与无限深流体中的驻波相比多了因子 $\operatorname{ch}kh$ 。

(2) 频散关系: 将 ϕ 代入自由面上的运动学条件(5.22), 得

$$\sigma^2 = kg \operatorname{th}kh$$

它比无限深流体中的驻波多了因子 $\operatorname{th}kh$, 可见, 在有限深流体中, 频率 σ 不仅与波长有关, 而且与深度 h 有关。质点的振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{kg \operatorname{th}kh}}$$

表明周期 T 不仅与波长有关, 也与深度 h 有关。

(3) 速度场: 根据速度定义, 有

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ck \operatorname{ch}kh (z+h) \cos\sigma t \cos kx$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ck \operatorname{sh}kh (z+h) \cos\sigma t \sin kx$$

(4) 迹线: 考虑流体质点只在平衡位置附近振动, 平衡位置 (x_0, z_0) 近似代替瞬时位置 (x, z) , 对速度场表达式积分, 得到

$$x = x_0 + a \frac{\operatorname{ch}k(z_0+h)}{\operatorname{sh}kh} \cos kx_0 \sin\sigma t$$

$$z = z_0 + a \frac{\operatorname{ch}k(z_0+h)}{\operatorname{sh}kh} \sin kx_0 \sin\sigma t$$

从而

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \operatorname{th}k(z_0+h) \operatorname{tg}kx_0$$

上式就是有限深流体平面驻波中流体质点的运动轨迹, 它是斜率为 $\operatorname{th}k(z_0+h) \operatorname{tg}kx_0$ 的直线段。

例 4 有限深流体中行进波的波动特性与流动特性分析

解:取有限深平面波速度势表达式(5.31)中的 ϕ_3 与 ϕ_2 叠加,即

$$\phi = \phi_3 - \phi_2 = C \operatorname{ch} k(z+h) \sin(kx - \sigma t)$$

(1)波轮廓线可表示为

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} k h \cos(kx - \sigma t) \quad \text{或} \quad \zeta = a \cos(kx - \sigma t)$$

式中, $a = (C\sigma/g) \operatorname{ch} k h$ 为波幅,显然,这是一个右行波。

(2)频散关系

将 ϕ 代入自由面上的运动学条件(5.22),得

$$\sigma^2 = kg \operatorname{th} k h$$

它与有限深流体中驻波的情况一样,利用这个关系,可以得到有限深流体中行进波的波速公式,即

$$U = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} k h} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

可见,通常情况下,有限深流体中行进波的波速不仅与波长有关而且还与流体深度有关。

若深度 h 与波长 λ 相比小很多,即 $h \ll \lambda$,则有 $\operatorname{th} k h \approx kh$,因而

$$U = \sqrt{gh}$$

表明水深很浅时的波速与波长无关,只与深度 h 有关,这种波叫作浅水波。

若深度 h 比波长 λ 大很多,即 $h \gg \lambda$,则有 $\operatorname{th} k h \approx 1$,因而

$$U = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

表明波的传播速度与无限深行进波一样,只与波长有关,与水深无关,这种波叫作深水波。事实上,如果深度 $h = \lambda$,则有 $\operatorname{th}(2\pi h/\lambda) = \operatorname{th} 2\pi \approx 0.998$,已显示出深水特性。

(3)速度场

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ck \operatorname{ch} k h (z+h) \cos(kx - \sigma t)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ck \operatorname{sh} k h (z+h) \sin(kx - \sigma t)$$

(4)迹线

用平衡位置 (x_0, z_0) 近似代替瞬时位置 (x, z) ,对速度表达式中的时间 t 积分,有

$$x = x_0 - a \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} k h} \sin(kx_0 - \sigma t)$$

$$z = z_0 + a \frac{\operatorname{sh}k(z_0 + h)}{\operatorname{sh}kh} \cos(kx_0 - \sigma t)$$

或

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left[\frac{a \operatorname{ch}k(z_0 + h)}{\operatorname{sh}kh} \right]^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\left[\frac{a \operatorname{sh}k(z_0 + h)}{\operatorname{sh}kh} \right]^2} = 1$$

式中, $a = (C\sigma/g)\operatorname{ch}kh$ 为波幅。此式表明,有限深行进波中流体质点的运动轨迹为椭圆,其半轴视质点所在位置的深度而异。在底部 $z = -h$ 处,椭圆转化为水平直线,即底层质点沿水平直线振动,如图 5.20 所示。

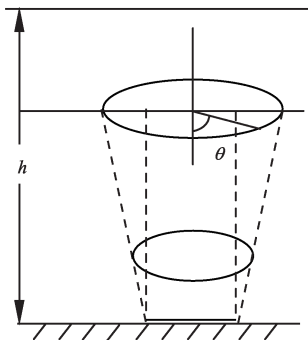


图 5.20 有限深行进波质点运动轨迹

例 5 求有限深水域具有波轮廓线 $\zeta = a \sin(kx - \sigma t)$ 的行进波的速度势 ϕ

解: 根据自由面上的动力学边界条件中 ζ 与 ϕ 的导数关系,可设 ϕ 的形式解为

$$\phi(x, z, t) = f(z) \cos(kx - \sigma t)$$

式中, $f(z)$ 是一个待定函数。将此形式解代入 ϕ 必须满足的拉普拉斯方程和底部边界条件,即

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

可得到 $f(z)$ 的定解问题,即

$$f''(z) - k^2 f(z) = 0, \quad f'(z) \Big|_{z=-h} = 0$$

由此求得 $f(z)$ 的解为

$$f(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \quad C_1 = C_2 e^{2kh}$$

或

$$f(z) = D \operatorname{ch}k(z+h) \quad (D \text{ 为待定常数})$$

从而

$$\phi = f(z) \cos(kx - \sigma t) = D \operatorname{ch}k(z+h) \cos(kx - \sigma t)$$

将上述 ϕ 和 ζ 的表达式代入自由面动力学边界条件,可求得

$$D = -\frac{ag}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{ch}kh}$$

最后可得速度势为

$$\phi = -\frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch}k(z+h)}{\operatorname{ch}kh} \cos(kx - \sigma t)$$

这里只举了一个有限深度行进波的例子。实际上,对于驻波或对于无限深流体中的波动,这种设形式解的方法均适用。

例 6 计算有限深流体中行进波的相速度和群速度

解:根据例 4 中推导,有限深流体中行进波的频散方程为

$$\sigma^2 = kg \operatorname{th}kh$$

因此,波的相速度为

$$U = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}kh}$$

波的群速度为

$$U^* = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}kh} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh}^2 kh}\right) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh}^2 kh}\right)$$

当 $h \rightarrow \infty$, 有 $\lim_{h \rightarrow \infty} (2kh/\operatorname{sh}^2 kh) = 0$, 故 $U^* = \frac{U}{2}$, 这就是无限深情况。当 $h \rightarrow 0$, 有 $\lim_{h \rightarrow 0} (2kh/\operatorname{sh}^2 kh) = 1$, 故 $U = U^*$, 与浅水情况一致。

例 7 求在一个波长范围内单位厚度流层中有限深流体驻波的动能、势能和机械能

解:设有限深流体中驻波的速度势为

$$\phi = c \operatorname{ch}k(z+h) \cos \sigma t \sin kx$$

则波轮廓方程为

$$\xi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = a \sin \sigma t \sin kx$$

式中, $a = (c\sigma/g) \operatorname{ch}kh$ 为波幅。一个波长范围内单位厚度薄层流体的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} \delta x = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda c^2 k \operatorname{ch}kh \operatorname{sh}kh \cos^2 \sigma t \sin^2 kx \delta x \\ &= \frac{1}{4} \rho c^2 k \lambda \operatorname{ch}kh \operatorname{sh}kh \cos^2 \sigma t \end{aligned}$$

利用有限深流体中的频散关系 $\sigma^2 = kg \operatorname{th}kh$, 则动能化简为

$$E_k = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda \cos^2 \sigma t$$

一个波长范围内单位厚度薄层流体的势能为

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 \delta x = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda a^2 \sin^2 \sigma t \sin^2 kx \delta x = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda \sin^2 \sigma t$$

总的机械能为

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda$$

例 8 推导具有水平流的浅水长波控制方程与频散关系

解: 将水平速度 u 和水深 H 表示为

$$u = V_0 + u' \quad \text{和} \quad H = H_0 + \zeta$$

式中, V_0 和 H_0 分别为未受扰动流体的均匀速度和水深, 均为一般量; u' 和 ζ 分别为扰动的速度和水深变化, 均为小量。将 u 和 H 的表达式代入浅水长波基本方程(5.69)和(5.72), 得

$$\frac{\partial}{\partial t}(V_0 + u') + (V_0 + u') \frac{\partial}{\partial x}(V_0 + u') = -g \frac{\partial}{\partial x}(H_0 + \zeta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0 + \zeta) + (V_0 + u') \frac{\partial}{\partial x}(H_0 + \zeta) = -(H_0 + \zeta) \frac{\partial}{\partial x}(V_0 + u')$$

考虑到 V_0 和 H_0 为常值一般量, 不随空间和时间变化。 u' 和 ζ 为小量, 它们的导数也是小量。将上述两式展开, 略去高阶小量, 得关于扰动量 u' 和 ζ 的一组线性方程为

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -H_0 \frac{\partial u'}{\partial x}$$

该方程即为有平流的浅水长波控制方程。

上述方程显然是一组波动方程, 可用来求解本征值问题获得波动的频散关系。为此, 令 ζ 和 u' 具有波动形式解, 即

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(kx - \sigma t)}, \quad u' = u_0 e^{i(kx - \sigma t)}$$

式中, ζ_0 和 u_0 是扰动量 ζ 及 u' 的幅值。将它们代入上述控制方程, 得到求解 ζ_0 和 u_0 的一组代数方程, 即

$$(kV_0 - \sigma)u_0 + gk\zeta_0 = 0$$

$$H_0 k u_0 + (kV_0 - \sigma)\zeta_0 = 0$$

要使 u_0 及 ζ_0 有非零解, 则有

$$\begin{vmatrix} kV_0 - \sigma & gk \\ H_0 k & kV_0 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

由此得到有平流时浅水长波的频散关系为

$$\left(V_0 - \frac{\sigma}{k}\right)^2 - gH_0 = 0$$

还可以解得有平流时的浅水长波波速为

$$U = \frac{\sigma}{k} = V_0 \pm \sqrt{gH_0}$$

例 9 推导上下两层无限深流体中界面波波速与群速度表达式

解: 设上下两层流体的密度和厚度分别为 (ρ_1, h_1) 和 (ρ_2, h_2) ,且 $\rho_1 < \rho_2$,不考虑水平流动。借助式(5.82),有

$$\rho_1 \operatorname{cth}kh_1(U - V_{10})^2 + \rho_2 \operatorname{cth}kh_2(U - V_{20})^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{k}g$$

令 $h_1 \rightarrow \infty, h_2 \rightarrow \infty$,且取 $V_{10} = V_{20} = 0$,得

$$U = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right]^{1/2}$$

由瑞利公式可求得群速度为

$$\begin{aligned} U^* &= U - \lambda \frac{dU}{d\lambda} = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 + \rho_2) \right]^{1/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{g}{2\pi} (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1) \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{g\lambda}{2\pi} (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1) \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} U \end{aligned}$$

实践题

1. 求波长为 145 m 海洋波的波速和周期。
2. 海洋波以 10 m/s 的速度移动,试求波长和周期。
3. 设有限深不可压缩理想重力流体中波动的速度势为 $\phi = C \operatorname{ch}k(z+h) \cos\sigma t \cos kx$ 。求:(1) 波轮廓线方程和波幅;(2) 节点的位置,并说明这种波是驻波;(3) σ 与 k 的关系;(4) 速度场、流线族方程和平衡位置为 (x_0, z_0) 的流体质点的迹线;(5) 压强场。
4. 设无限深不可压缩理想重力流体中波动的速度势为 $\phi = C e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$ 。求:(1) 波轮廓线方程和波幅;(2) 节点和腹点的位置,并说明这是一种行进波,求波速;

(3) 波长 λ 和周期 T ; (4) σ 与 k 的关系及 λ 与 T 的关系; (5) 速度场、流线族方程和平衡位置为 (x_0, z_0) 的流体质点的迹线; (6) 压强场。

5. 设无限深不可压缩理想重力流体中有一行进波, 其自由面方程为 $\zeta = a \cos(kx - \sigma t)$, 求波动的速度势。

6. 无限深水域中, 在水面下 $z = -d$ 处放置压强传感器记录到压强波动的最大变化为 H , 圆频率为 σ , 试求自由面波动的波幅和圆频率。

7. 证明: $W(z) = a \cos k(z + ih - ct)$ 是水深为 h 流体中的行进波之复势, 其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, c 为波速, $z = x + iy$ 为复变数, y 轴竖直向上, 原点在静止的水面上。

8. 已知不可压缩流体平面势流的复势为 $W(z) = B \sin m(z + ih) \sin qt$, 其中 B, m, q, h 为实常数, $z = x + iy$ 为复变数, y 轴竖直向上, 试说明流动类型, 并指出几个常数的物理意义。

9. 设无限深不可压缩流体中, 有两列波幅相同、传播方向相同的平面简谐波, 其波数分别为 $k_1 = 12 \text{ m}^{-1}$ 和 $k_2 = 10 \text{ m}^{-1}$, 取 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。求: (1) 合成波的传播速度; (2) 一个波群所占有的空间距离及所包含的个别波个数; (3) 群速度。

10. 在深度为 h 的水域中, 有一沿 x 轴方向传播的行进波, 试求一个波长范围内单位厚度薄层流体的动能、势能、机械能和波动能量的传播速度。

11. 试以有限深流体中的简谐行进波为例, 证明单位时间内通过单位宽度波动横截面所传递的波动能量是

$$N = eU^* = \frac{E_k + E_p}{\lambda} U^*$$

式中, $e = (E_k + E_p)/\lambda$ 是单位长度上的波动能量, U^* 是群速度。

12. 若渠道各横截面彼此相等, 面积为 S , 且水面上的横截面宽度为 b , 试求渠道中长波的传播速度。

13. 求在深度为 20 cm 的梯形截面渠道中长波的传播速度。设梯形的上底为 60 cm, 下底为 40 cm。

14. 设有上下两层液体, 其密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), 深度均为无限深, 上层液体以速度 V_0 沿 x 轴移动, 下层液体无平行移动。试证明分界面上波长为 λ 行进波的传播速度 U 满足

$$g(\rho_2 - \rho_1) = \frac{2\pi}{\lambda} [\rho_1 (U - v_0)^2 + \rho_2 U^2]$$

15. 设有上下两层液体, 其密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), 深度均为无限深, 且均无平行移动。试证明分界面上波长为 λ 行进波的传播速度和群速度分别为

$$U = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad U^* = \frac{1}{2} U$$

16. 证明:不可压缩分层流体中,质点浮力振荡的圆频率为

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}$$

式中, $\rho_0(z)$ 是未受扰动时密度随高度的分布。

17. 导出不可压缩分层流体中小振幅重力内波运动的控制方程,并证明重力内波的圆频率 σ 以 N 为上限。

本章小结

本章涉及的研究对象主要包括三类流体波动,它们是不可压缩理想重力流体的表面波、浅水长波和重力内波。

1. 基本概念

- (1) 波动概念
- (2) 波动参数:波长、周期、波数、圆频率、相速度、波幅、群速度、波能(包含势能和动能)
- (3) 运动和动力学参数:质点速度、流线、迹线、压强
- (4) 频散关系,包括无限深和有限深流体
- (5) 小振幅波假设

2. 基本理论

(1) 不可压缩理想重力流体的表面波是一种无旋运动,可用引入速度势的方法研究其性质。根据小振幅波假设,可以获得平面重力表面波的控制方程组:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (2)$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=-h, \text{ 或 } z=-\infty} = 0 \quad (5)$$

利用分离变量法求解拉普拉斯方程①,由边界条件④和⑤确定速度势 ϕ 的具体表达式和频散关系;再由方程③确定波的轮廓线,由频散关系确定波动要素(波长、周期、波数、波速)之间的关系,以及群速度和波动能量。进一步,由方程②确定压强场,由

$\mathbf{V} = \nabla\phi$ 确定速度场,再由速度分布确定波动质点的流线和轨迹线。不可压缩理想重力流体的表面波动可以分成两种类型:一类是驻波,另一类是行进波。两种波动类型的讨论可分别在无限深流体和有限深流体中进行。

(2) 浅水长波是指不可压缩理想重力流体在水深较浅条件($H_0 \ll \lambda$)下做一种小振幅的表面波动。考虑垂向速度变化缓慢($dw/dt = 0$),由此建立水深 H 变化的控制方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + X(x, t) \quad \text{和} \quad \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

采用小扰动线性化近似化方法将其化为关于水面扰动 ζ 的方程组,再通过设波动形式解的方法,获得浅水长波的波动性质。

(3) 重力内波是指发生在密度稳定层结流体内部的一种波动。内波一种最简单的形式是发生在两层密度不同、互不参混流体之间的界面波,可以借助均匀流体中波动理论来研究,通过界面运动学和动力学条件讨论界面波的特性。密度连续变化流体中内波的研究可借助于理想不可压缩流体基本方程建立重力内波的控制方程,推导尚限于小扰动的线性内波问题。连续分层流体中内波的恢复力为约化重力,即重力与浮力之差。与表面波相比较,内波具有周期(或波长)长、传播速度慢以及三维传播等特点,它的振动频率上限是浮力频率。

3. 基本方法

- (1) 已知重力波的波长,求波速和周期;
- (2) 已知重力波的圆频率,求波速和周期;
- (3) 已知波轮廓方程,求波动参数和运动参数;
- (4) 已知速度势,求波动参数和运动参数;
- (5) 估算波动能量。

第 6 章 黏性流体动力学基础

在前面各章中,除了运动学和静力学等内容外,所研究的对象是理想流体,它是真实流体的一种近似,其结果具有重要意义。但是,真实流体都有一定的黏性,在一些问题中,如果把它看作理想流体,所得结果就与实际相差较远。例如,在圆柱绕流中,理想流体的理论不能解释圆柱实际受到的阻力;又如,对于离地面约 1.5 km 以上的大气,可以不考虑摩擦力,把它看作理想流体,但是研究这个高度以下大气的运动,就必须考虑摩擦力。因此,有必要进一步研究黏性流体运动的一些基本规律。

黏性流体有两种不同的流动状态——层流和湍流。层流是一种层次分明的有规则的运动,流体的速度和其他物理量无论在空间上还是在时间上都是连续的;湍流是一种无规则的随机运动,流体的速度和其他物理量都不规则地剧烈脉动着。本章主要阐述层流问题的基本理论,并对湍流问题做初步介绍。

全章内容分为八个部分:第一,介绍应力张量的概念,建立应力张量和形变率张量之间的基本关系;第二,建立黏性流体动力学基本方程;第三,介绍黏性流动的基本特性;第四,推导不可压缩黏性流体层流问题的精确解;第五,讨论相似理论和量纲分析;第六,推导小雷诺数流动问题的近似解;第七,讨论大雷诺数流动问题的处理方法——层流边界层理论;第八,介绍湍流引论。

6.1 应力张量与形变率张量

黏性流体之所以与理想流体不同,就在于黏流中存在着切应力。因此,黏性流体受到的表面力要比理想流体复杂得多。为了描述流体中一点的受力状态,需要引入一个新的物理量,即应力张量。

6.1.1 应力张量

在 3.1 节中曾经指出,理想流体和静止流体的表面力一定是正压力,且同一点处在各方向的压强都相等,因此,理想流体和静止流体中的应力矢量可表示为

$$\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$$

式中,压强 p 是空间位置 \boldsymbol{r} 和时间 t 的函数,即 $p = p(\boldsymbol{r}, t)$ 。但是,对于黏性流体来说,应力矢量 \boldsymbol{p}_n 不仅决定于作用点的位置,而且还与作用面元的取向有关,一般它是位置矢量、面元法向 \boldsymbol{n} 和时间的函数,即

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \quad (6.1)$$

因此,流体中某一点的应力状态不能用一个矢量来决定,必须引入一种新的物理量——应力张量,来描述它的应力状态。

为此,首先证明作用在任一点 M 处以 \mathbf{n} 为法向的面元上的应力矢量 \mathbf{p}_n ,可用该点处三个以坐标轴方向为法向的面元上的应力矢量 $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ 来表示。取以 M 为顶点的小四面体 $MABC$,其三个侧面分别平行于各个坐标面,设底面 ABC 的面积为 $\Delta\sigma$,法向为 \mathbf{n} ,高为 h ,如图 6.1 所示,则三个侧面的面积分别为

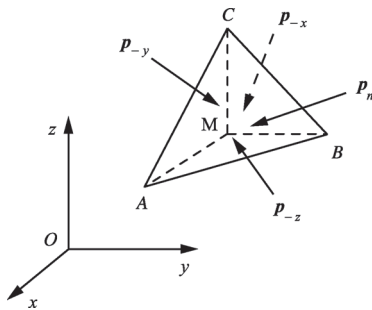


图 6.1 小四面体各面上的应力

$$\begin{cases} \Delta\sigma_x = \Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, x) = n_x \Delta\sigma \\ \Delta\sigma_y = \Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, y) = n_y \Delta\sigma \\ \Delta\sigma_z = \Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, z) = n_z \Delta\sigma \end{cases} \quad (6.2)$$

小四面体的体积为 $\tau = h\Delta\sigma/3$ 。对小四面体的流体元应用动量定理,有

$$\mathbf{F}\rho\tau + \mathbf{p}_n\Delta\sigma + \mathbf{p}_{-x}\Delta\sigma_x + \mathbf{p}_{-y}\Delta\sigma_y + \mathbf{p}_{-z}\Delta\sigma_z = \frac{d\mathbf{V}}{dt}\rho\tau$$

由于 $\mathbf{p}_{-x} = -\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_{-y} = -\mathbf{p}_y, \mathbf{p}_{-z} = -\mathbf{p}_z$,并利用式(6.2),有

$$\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)\rho \frac{1}{3}h\Delta\sigma + \mathbf{p}_n\Delta\sigma - (n_x\mathbf{p}_x + n_y\mathbf{p}_y + n_z\mathbf{p}_z)\Delta\sigma = 0$$

上式各项除以 $\Delta\sigma$,并令 $h \rightarrow 0$,得

$$\mathbf{p}_n = n_x\mathbf{p}_x + n_y\mathbf{p}_y + n_z\mathbf{p}_z \quad (6.3)$$

注意,各应力矢量不一定沿各作用面的法线方向。将上式写成分量式,有

$$\begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{cases} \quad (6.4)$$

这就证明了应力矢量 \mathbf{p}_n 可用以三个坐标轴为法向的面元上的应力矢量 $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y$ 和 \mathbf{p}_z 来表示。而三个矢量 $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y$ 和 \mathbf{p}_z 又各有三个分量。因此,流体中某点 $M(x, y, z)$ 处在时刻 t 的应力状态应由三个矢量或九个分量来决定,九个分量可以排列成一个矩阵,记为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = p_{ij} \quad (6.5)$$

式中, p_{ij} 表示作用在以 x_i 轴为法向面元上的应力沿 x_j 方向的分量(注: x_1, x_2, x_3 分别表示 x, y, z 轴), 称为应力张量。 p_{ij} 还可以用并矢关系表示为

$$\mathbf{P} = i\mathbf{p}_x + j\mathbf{p}_y + k\mathbf{p}_z \quad (6.6)$$

事实上,

$$\begin{aligned} i\mathbf{p}_x + j\mathbf{p}_y + k\mathbf{p}_z &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矢量与张量的内积遵从结合律, 因此, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{n} \cdot (i\mathbf{p}_x + j\mathbf{p}_y + k\mathbf{p}_z) = (\mathbf{n} \cdot i)\mathbf{p}_x + (\mathbf{n} \cdot j)\mathbf{p}_y + (\mathbf{n} \cdot k)\mathbf{p}_z \\ &= n_x\mathbf{p}_x + n_y\mathbf{p}_y + n_z\mathbf{p}_z \end{aligned}$$

利用式(6.3), 有

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad (6.7)$$

将式(6.4)写成矩阵等式后也可以得到上述结果。

应力张量 \mathbf{P} 的九个分量中, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 为法应力, 其余为切应力。可以证明, 应力张量是对称张量, 即

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (6.8)$$

为此, 在流体中取以点 $M(x, y, z)$ 为中心、六个面分别平行于各坐标面、边长分别为 $\delta x, \delta y$ 和 δz 的小长方体, 作过点 M 且平行于坐标 y 的轴线 y' , 如图 6.2 所示。利用动量矩定理, 考虑切应力对轴线 y' 的力矩, 忽略质量力力矩和动量矩变化率项的高阶小量, 有

$$\begin{aligned} &\left(p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y \frac{\delta z}{2} + \left(-p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} - \\ &\left(p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} - \left(-p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y \frac{\delta z}{2} = 0 \end{aligned}$$

化简后, 得

$$p_{xz} = p_{zx}$$

同理, 考虑对其他两个方向的分量式, 可得 $p_{xy} = p_{yx}, p_{yz} = p_{zy}$ 。由此证明了应力张量是对称张量, 故在应力张量的九个分量中, 只有六个量是彼此独立的。

在理想流体和静止流体中, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, p_{xy} = p_{yx} = p_{xz} = p_{zx} = p_{yz} = p_{zy} = 0$, 则应力张量为

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} \quad (6.9)$$

式中, \mathbf{I} 为单位张量, 其分量为

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

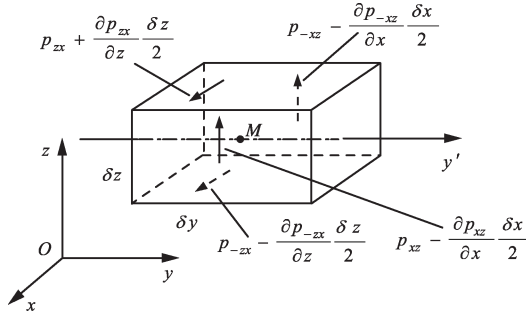


图 6.2 小长方体表面上对 y' 轴有力矩作用的应力

6.1.2 真实流体动量方程

在任一时刻 t , 取真实流体中封闭曲面为 σ 所包围体积为 τ 的流体系统, 类似于 3.2 节的推导, 根据动量定理可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathbf{V} \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \rho d\tau + \oint_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma$$

由于是真实流体, 含有黏性, 故 \mathbf{p}_n 不应写成 $-\mathbf{p}\mathbf{n}$, 而是写为 $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$. 取控制体 CV 与某时刻 t 的系统体积 τ 重合, 控制面 CS 与系统表面 σ 重合, 利用雷诺公式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \mathbf{F} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} d\sigma \quad (6.10)$$

在 3.2 节中已得出

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \rho d\tau$$

利用积分关系式(见附录 B), 有

$$\oint_{CS} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} d\sigma = \int_{CV} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau$$

式中, $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 是应力张量的散度, 为一矢量, 可表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}$$

将以上结果代入式(6.10), 移项并整理, 得

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \right] \rho d\tau = 0$$

由于控制体 CV 的取法是任意的, 则有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (6.11)$$

或

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right)$$

上式为真实流体动量方程的普遍形式, 式中, \mathbf{F} 是作用于单位质量流体的质量力, $(1/\rho) \nabla \cdot \mathbf{P}$ 表示作用在单位质量流体上表面力的合力。在直角坐标系 (x, y, z) 中, 方程(6.11)的分量形式为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv}{dt} = Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{dw}{dt} = Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (6.12)$$

6.1.3 本构关系

首先讨论黏性流体运动方程组的完备性。方程(6.12)含有 10 个未知函数, 它们是密度、3 个速度分量和 6 个彼此独立的应力分量, 显然, 即便加上连续性方程也不能构成完备方程组, 其主要原因是黏性流体中的应力不同于理想流体中的应力, 前者需要由应力张量来决定, 而后者只需要由一个标量压强决定。为此, 要减少方程未知量的数目, 就要设法把应力用其他物理量来表示。

由前述可知, 流体中只有在速度分布不均匀时才会出现黏性应力。因此, 应力一定与速度分布的不均匀性有关, 这种关系由物质的物理属性所决定, 称为本构关系。流体力学中的本构关系就是应力张量与形变率张量之间的关系, 它的建立最终归结为实验。

牛顿黏性定律的一般形式可以写成

$$p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\mu S_{yx}$$

式中, μ 是动力黏度系数, S_{yx} 为剪形变率。同理, $p_{xz} = 2\mu S_{xz}$, $p_{yz} = 2\mu S_{yz}$, 统一记为

$$p_{ij} = 2\mu S_{ij} \quad (i \neq j) \quad (6.13)$$

1845 年, 斯托克斯将牛顿黏性定律进一步推广提出如下假设: ①应力张量是形变率张量的线性函数; ②流体是各向同性的, 即流体的性质与方向无关; ③当流体静止时流体的应力就是静压强。

由假设①, 应力张量可表示为

$$\mathbf{P} = a\mathbf{S} + b\mathbf{I} \quad (6.14)$$

式中, \mathbf{S} 为形变率张量, 其分量 $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, \mathbf{I} 为单位张量。

由假设②, a, b 为标量, 利用式(6.13), 有

$$a = 2\mu \quad (6.15)$$

把上式代入式(6.14), 并取主对角线上三分量之和, 由此得

$$b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (6.16)$$

将 a, b 表达式代入式(6.14), 得

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \left[\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \mathbf{I} \quad (6.17)$$

由假设③, 当流体静止时, 有

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I}$$

式中, p 为静压强, 它是平衡态意义上的热力学压强, 在黏性流体问题讨论时, 记

$$p_m = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \quad (6.18)$$

称为流体动力学压强。动力学压强与热力学压强是不同的, 它们之间的差与速度的分布有关。考虑到 $p_{11} + p_{22} + p_{33}$ 是应力张量的不变量, 与坐标的选取无关, 而形变率张量的不变量是 $S_{11} + S_{22} + S_{33} = \nabla \cdot \mathbf{V}$, 两者应有线性关系, 故有

$$\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V}$$

式中, μ' 为常数。将上式代入式(6.17), 得

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \left[-p + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \mathbf{I}$$

若令 $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$, 则有

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} \quad (6.19a)$$

或写为

$$p_{ij} = 2\mu S_{ij} + (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \quad (6.19b)$$

以上称为广义牛顿应力公式, 遵从这一规律的流体, 叫作牛顿流体, 否则叫作非牛顿流体, 式(6.19)就是牛顿流体的本构关系式。

式(6.19)中 λ 出现在与 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 有关的项中。对于不可压缩流体, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, λ 不出现, 动力学压强等于热力学压强 p , 故称 λ 为体膨胀黏度系数。对于大多数流体而言, μ'/μ 为 $10^{-6} \sim 10^{-4}$, 斯托克斯曾假设 $\mu' = 0$, 故

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (6.20)$$

此时本构关系式(6.19)变为

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{V}\right)\mathbf{I} \quad (6.21)$$

下面研究的黏性流体一般均指牛顿流体,其本构关系式都采用式(6.21)。

6.2 黏性流体动力学基本方程和边界条件

支配黏性流体运动的基本方程仍然是连续性方程、动量方程和能量方程等。前面在 2.3 节中已经推导了连续方程,由于不涉及作用力,其在黏性流体中仍然适用,故不再专门讨论。下面主要讨论黏性流体的动量方程和能量方程。

6.2.1 黏性流体微分形式动量方程——纳维-斯托克斯方程

前面已经得出了真实流体动量方程的普遍形式(6.11),它对牛顿流体和非牛顿流体都适用。如果将牛顿流体的本构关系式(6.21)代入上式,就可以得到牛顿流体微分形式的动量方程。为此,需要求式(6.21)右端的散度。由于

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{i}_1 \mathbf{\nabla} u_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{\nabla} u_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{\nabla} u_3) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{\nabla} u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{\nabla} u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{\nabla} u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_3^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\nabla} (\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{2} \mathbf{\nabla}^2 \mathbf{V} \end{aligned}$$

式(6.21)右端第二项是标量与单位张量的乘积,令 $\Phi = p + \frac{2}{3}\mu\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{V}$,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{\nabla} \cdot (\Phi \mathbf{I}) &= \mathbf{\nabla} \cdot [\Phi(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3)] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \\ &= \mathbf{\nabla} \Phi \end{aligned}$$

利用以上结果,并假定动力黏度系数 μ 为常数,则得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{P} &= \nu \mathbf{\nabla} (\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{V}) + \nu \mathbf{\nabla}^2 \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \mathbf{\nabla} p - \frac{2}{3} \nu \mathbf{\nabla} (\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{V}) \\ &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{\nabla} p + \frac{1}{3} \nu \mathbf{\nabla} (\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{V}) + \nu \mathbf{\nabla}^2 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (6.22)$$

式中, $\nu = \mu/\rho$ 为运动黏度系数。将上式代入式(6.11), 得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.23a)$$

或
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.23b)$$

这就是牛顿流体微分形式的动量方程, 又称为纳维-斯托克斯方程, 简称 N-S 方程。式中, 右端第一项为质量力, 第二项为气压梯度力, 第三项与第四项之和为单位质量流体所受到的黏性力。如果流体无黏性 $\nu = 0$, 则方程(6.23) 退化为欧拉方程。

利用公式 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$, 方程(6.23) 可以写成 Lamb 形式,

即

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.24)$$

如果流体是不可压缩的, 则 N-S 方程简化为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.25)$$

在直角坐标系 (x, y, z) 中, 方程(6.25) 的分量式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (6.26)$$

在柱坐标系 (R, φ, z) 中, 方程(6.25) 的分量式为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{R} = F_R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left(\nabla^2 v_R - \frac{v_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_R v_\varphi}{R} = F_\varphi - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z \end{cases} \quad (6.27)$$

式中, $\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, 这里 f 代表任意函数。

在球坐标系 (r, θ, φ) 中, 方程(6.25) 的分量式为

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \\
 &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta}{r^2} \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \\
 &= F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} \\
 &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right)
 \end{aligned} \right. \quad (6.28)$$

式中, $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$, 这里 f 代表任意函数。

6.2.2 黏性流体微分形式能量方程

(1) 能量方程

对于任意时刻 t , 封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的流体系统, 类似于 3.3 节的推导, 根据能量转换和守恒定律可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} q \rho d\tau \quad (6.29)$$

它表明, 系统总能量随时间的变化率, 等于质量力和表面力对系统做功的功率与单位时间内传入系统的热量之和。取控制体 CV 与时刻 t 的系统体积 τ 重合, 控制面 CS 与系统表面 σ 重合, 利用雷诺输运公式, 可得对控制体积分形式的能量方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau + \oint_{CS} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{CV} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{CS} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{CV} q \rho d\tau \quad (6.30)$$

在 3.3 节中已推导出

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau + \oint_{CS} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\tau = \int_{CV} \frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho d\tau$$

$$\text{又} \quad \oint_{CS} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} d\sigma = \oint_{CS} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) d\sigma = \int_{CV} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) d\tau$$

将上述结果代入式(6.30), 并通过移项和合并得

$$\int_{CV} \left[\frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - q \right] \rho d\tau = 0$$

由于控制体 CV 是任意取的, 则有

$$\frac{d}{dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) + q \quad (6.31)$$

这就是黏性流体微分形式的能量方程,它表明,单位质量流体总能量(内能与动能之和)随时间的变化率,等于质量力和表面力的作用功率与单位时间内单位质量流体所吸收的热量三者之和。方程(6.31)中含有应力张量,对牛顿流体和非牛顿流体都适用。若将本构关系式(6.21)代入,则只适用于牛顿流体。

3.3节中已指出,方程(6.31)中的热量 q 表示为

$$q = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T) + q_R \quad (6.32)$$

上式右端两项分别为通过传导和辐射两种方式,单位时间、单位质量流体所吸收的热量。

(2) 动能方程

将速度矢量点乘普遍形式的动量方程(6.11),整理得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} \quad (6.33)$$

其中

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right) \cdot \mathbf{V} \\ &= \frac{\partial(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_3} - p_3 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

由于

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} = (i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3) \cdot \mathbf{V} = i_1 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V}) + i_2 (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V}) + i_3 (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V})$$

则有

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V})}{\partial x_3}$$

因此

$$(\nabla \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - \sum_{i=1}^3 p_i \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (6.34a)$$

上式右端第二项为应力张量 p_{ij} 与速度的梯度张量:

$$\nabla \mathbf{V} = i_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

的二重内积,记为 $\mathbf{P}:\mathbf{V}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, 则式(6.34a)写成

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{P}:\mathbf{V}\mathbf{V} \quad (6.34b)$$

上式代入式(6.33),得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}:\mathbf{V}\mathbf{V} \quad (6.35)$$

这就是普遍微分形式的动能方程。由式(6.31)减去式(6.35)得内能方程:

$$\frac{de}{dt} = q + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}:\mathbf{V}\mathbf{V} \quad (6.36)$$

方程(6.35)和(6.36)对牛顿流体和非牛顿流体都适用。为了进一步说明两个方程右端最后一项的意义,将牛顿流体的本构关系式(6.21)代入,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \mathbf{P}:\mathbf{V}\mathbf{V} &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &= 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \left(\frac{2}{3} \nu \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{p}{\rho} \right) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &= 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nu (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^2 - \frac{p}{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \\ &= \phi - \frac{p}{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (6.37)$$

式中, $\phi = 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nu (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^2$, 它表示由于黏性而引起的动能耗散率,可以证明 $\phi \geq 0$ 。将方程(6.37)代入方程(6.35),则动能方程写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) + \frac{p}{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - \phi \quad (6.38)$$

它表示单位质量流体动能的变化率,等于质量力、表面力以及流体体积变化时内部压力对单位质量流体的功率之和,再减去黏性摩擦产生的动能耗散率。

相应地,内能方程(6.36)变成

$$\frac{de}{dt} = q - \frac{p}{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \phi \quad (6.39)$$

它表明引起流体内能变化有三个因素:一是传热;二是由于流体压缩性引起的内部压力做功,使得动能与内能之间发生转换,这种转换是双向的,当流体膨胀时内能转换为动能,而压缩时动能转化为内能;三是由于流体黏性使得动能向内能转换,这种转换是单向的。

6.2.3 黏性流体边界条件

求解黏性流体动力学的问题需要一组完备方程和合适的定解条件。完备方程组

的建立,视流体或流动的性质而定。定解条件包括初始条件和边界条件,黏性流体初始条件的提法与理想流体完全相同,而黏性流体边界条件与理想流体有着显著的不同,这里着重讨论后者。

(1)分界面上运动学边界条件

3.4节中已经指出,在连续流动的条件下,两种介质在其分界面上不发生分离,若假定它们不相互渗透,则它们的法向速度相等,即

$$(v_n)_{\text{介质1}} = (v_n)_{\text{介质2}} \quad (6.40)$$

如果分界面方程为 $F(x, y, z, t) = 0$, 则有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{介质}i} \cdot \nabla F = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.41)$$

除此之外,对于黏性流体还要考虑由于黏性使得两种介质在分界面上的无滑移,从而使它们的切向速度相等,即

$$(v_t)_{\text{介质1}} = (v_t)_{\text{介质2}} \quad (6.42)$$

总之,对于黏性流体,在两种介质的分界面上,两种介质的速度应相等,即

$$\mathbf{V}_{\text{介质1}} = \mathbf{V}_{\text{介质2}} \quad (6.43)$$

因此,在流体与固壁交界面处,有

$$\mathbf{V}_{\text{流}} = \mathbf{V}_{\text{固壁}} \quad (6.44)$$

当固壁静止时,有

$$\mathbf{V}_{\text{流}} = 0 \quad (6.45)$$

在流体与空气的交界面处,即液体的自由面,通常不考虑空气对液体的黏性力,只采用条件(6.40)或(6.41),即只有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{流体}} \cdot \nabla F = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.46)$$

式中, $F(x, y, z, t) = 0$ 为自由面方程。

(2)分界面上动力学边界条件

3.4节中已经给出分界面上一般流体的动力学边界条件:

$$(\mathbf{p}_n)_{\text{介质1}} - (\mathbf{p}_n)_{\text{介质2}} + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} = 0 \quad (6.47)$$

它对理想流体和黏性流体都适用,式中, α 为表面张力系数, R_1 和 R_2 为界面的两个主曲率半径,法向 \mathbf{n} 指向介质2内部,并设界面向介质1一侧弯曲。对于黏性流体,取式(6.47)分别沿界面的法向和切向投影:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}_{nn})_{\text{介质1}} - (\mathbf{p}_{nn})_{\text{介质2}} + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \\ (\mathbf{p}_{nt})_{\text{介质1}} - (\mathbf{p}_{nt})_{\text{介质2}} = 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

如果表面张力系数很小或界面比较平坦,则可略去由于表面张力而产生的附加压强,

从而有

$$(\mathbf{p}_n)_{\text{介质1}} = (\mathbf{p}_n)_{\text{介质2}} \quad (6.49)$$

或

$$\begin{cases} (p_{nn})_{\text{介质1}} = (p_{nn})_{\text{介质2}} \\ (p_{nt})_{\text{介质1}} = (p_{nt})_{\text{介质2}} \end{cases} \quad (6.50)$$

在液体自由面处,不考虑空气的黏性,忽略由于表面张力而产生的附加压强,则有

$$\begin{cases} (p_{nn})_{\text{液体}} = -p_a \\ (p_{nt})_{\text{液体}} = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

式中, p_a 是自由面上的大气压强。

6.3 黏性流动基本特性

黏性流体动力学问题的求解要比理想流体力学问题更困难,因为支配黏性流体的方程和边界条件更加复杂,由此也决定了黏性流体与理想流体有着完全不同的特性。流动有旋性、涡旋扩散性和能量耗散性,是黏性流动的基本特性。下面以不可压缩黏性流动为例,来说明这些特性。

6.3.1 流动有旋性

理想流体的运动可以是有旋的,也可以是无旋的。在 4.3 节中曾指出,理想正压流体在有势质量力的作用下,如果某一时刻流动是无旋的,则它始终是无旋的,对无旋流动的处理可以引入势流理论。但是,黏性流动一般是有旋的,下面将说明这一点。

(1) 考虑不可压缩黏性流动,此时完备方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (6.52)$$

利用公式 $\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$, 则方程组(6.52) 变成

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla \times \boldsymbol{\Omega} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (6.53)$$

其满足的运动学边界条件是

$$(v_t)_{\text{流体}} = (v_t)_{\text{固壁}} \quad (6.54)$$

如果流动是无旋的, $\boldsymbol{\Omega} = 0$, 则方程组(6.53) 中的 N-S 方程变成欧拉方程,它是支配理想流体运动的方程。显然,对于理想流体,运动学边界条件(6.54) 中多了对切向速

度的约束条件,故在一般情况下将使问题无解,因此,黏性流动一般是有旋的。

(2) 固定边界内的流动一定是有旋的。因为如果流动是无旋的,则存在速度势 ϕ ,且在边界上为常数,但是 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \phi = 0$,由极值原理知,在整个流动区域上 $\phi =$ 常数,有 $\mathbf{V} = \nabla \phi = 0$,流体应是静止的,表明无旋流动是不可能的。事实上,固定边界附近,流体做剪切流动,如图 6.3 所示, $\Omega_z = -\partial u / \partial y \neq 0$,故一定有旋。

(3) 若黏性力 $\nu \nabla^2 \mathbf{V} \neq 0$,则流动一定是有旋。因为如果流动是无旋的,则存在速度势 ϕ ,使 $\nu \nabla^2 \mathbf{V} = \nu \nabla^2 (\nabla \phi) = \nu \nabla (\nabla^2 \phi) \equiv 0$,该结果显然与假设矛盾。

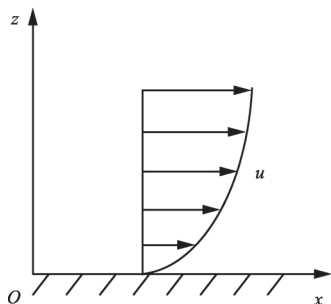


图 6.3 边界附近的剪切流

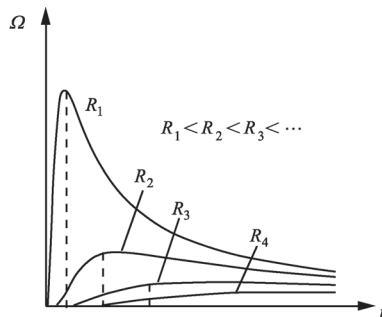


图 6.4 涡量随时间的变化

6.3.2 涡旋扩散性

在 4.3 节中已指出,理想正压流体在有势质量力的作用下,涡旋是守恒的。原来有旋的区域始终有旋,原来无旋的区域始终无旋。此时

$$\text{Helm}\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

这是涡旋守恒的必要和充分条件。对于不可压缩流体,该条件变成

$$\text{Helm}\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} = 0$$

对于黏性流体,由兰勃形式的 N-S 方程(6.24)两端取旋度,涡量方程变成

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{F} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (6.55)$$

对于不可压缩黏性流体,当质量力有势时,有

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (6.56)$$

即 $\text{Helm}\boldsymbol{\Omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \neq 0$,表明涡旋守恒的条件不满足,也就是说将产生涡旋扩散,原来无旋的区域将具有涡旋,原来有旋的区域涡管强度将发生变化。方程(6.56)称为涡旋的扩散方程或输运方程。图 6.4 给出了不可压缩黏性流体中孤立直涡线在无界

区域中扩散的例子。可以证明,对于初始涡管强度为 Γ 的孤立直涡线,它的涡量和速度为

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi vt} e^{-\frac{R^2}{4vt}} \quad \text{和} \quad V = v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi R} (1 - e^{-\frac{R^2}{4vt}})$$

可以看出,在 $t > 0$ 的任意时刻,整个流场是有旋的,且涡量随径向距离 R 增大而逐渐减小,当 $R \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow 0$; 在 $R > 0$ 的任意距离处,随着时间的推延,涡量先是增大,然后减小,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow 0$ 。从图 6.4 中可以看出不同距离处的涡量随时间的变化情况。

6.3.3 能量耗散性

在 3.3 节中,已经导出了理想流体微分形式的机械能方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{V}$$

它表明,如果压强分布均匀,则单位质量流体质点的机械能保持不变。对于理想流体系统积分形式的机械能方程:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = - \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

可以看出,如果流体不可压缩,则流体内部无动能与内能之间的转换,若再加上表面力不做功,则系统的机械能守恒。

但是对于黏性流体来说,如果质量力定常有势,则由方程(6.38),有机械能方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} - \phi \quad (6.57)$$

可以看出,即使流体不可压缩,而且表面力也不做功,但由于 $\phi > 0$,流体质点的机械能也将会减少。方程(6.38)两端乘以密度 ρ 并对系统体积 τ 积分,则黏性流体积分形式的动能方程为

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{V^2}{2} \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rho d\tau + \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau - \int_{\tau} \phi \rho d\tau \quad (6.58)$$

如果质量力有势且定常,则机械能方程为

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = \oint_{\sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\sigma + \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau - \int_{\tau} \phi \rho d\tau \quad (6.59)$$

可以看出,即使表面力不做功,流体不可压缩,内部压力不做功,仍有

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) \rho d\tau = - \int_{\tau} \phi \rho d\tau < 0 \quad (6.60)$$

表明黏性流动的机械能总是耗散的,而不可能是守恒的。

6.4 不可压缩黏性流体层流精确解

寻找 N-S 方程的精确解,历来是流体力学研究感兴趣的课题之一。由于方程本身的复杂性,只有一些非常特殊情况下精确解被求得。两块平行平板间的层流流动是 N-S 方程具有精确解的典型例子,它有两种类型:固定平板间的压差流(又称泊肃叶流, Poiseuille Flow)和平板间做相对平移运动的剪切流(又称库埃特流, Couette Flow)。它们流动的共同特点是,流动方向互相平行,速度梯度与速度垂直,从而使 N-S 方程中的非线性项自动消失,便于求得精确解。

6.4.1 平板间泊肃叶流

两块静止的无限大水平放置的平行平板间充满不可压缩黏性流体,在压强梯度的作用下,流体沿着与平板平行的方向做定常流动。设下板某点 O 处的压强为 p_0 ,两板间距离为 h ,流体密度为 ρ ,黏度系数为 μ 。取 O 为原点, x 轴沿下板, z 轴垂直于平板,如图 6.5 所示,考察 xz 平面的流动。

(1) 速度分布

根据不可压缩连续性方程和 N-S 方程(6.26),描述 xz 平面上流动的基本方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.61a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.61b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (6.61c)$$

已知假设条件为:①定常运动 $\partial/\partial t = 0$;② $\rho =$ 常数;③重力场, $X = 0, Z = -g$;④在 xz 面的平面平行运动, $\partial/\partial y = 0, v =$ 常数;⑤在 x 方向为充分发展流动, $\partial u/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0, u = u(z)$;⑥壁面无滑移条件, $u|_{z=0,h} = 0$ 。

根据以上条件,方程(6.61b)和(6.61c)简化为

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (6.62a)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.62b)$$

由式(6.62b)积分,得

$$p = -\rho g z + p_1(x) \quad (6.63)$$

将上式代入式(6.62a),得

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{dp_1}{dx} = k \quad (6.64)$$

上式中左边仅与 z 有关, 而右边与 z 无关, 只有均为常数才能相等, 故 $k = \text{常数}$ 。显然, 为了使流体沿 x 轴正向流动, 应该具有顺压梯度, 即 $dp_1/dx < 0$ 。

对式(6.64)积分两次, 得

$$u = \frac{k}{2\mu} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (6.65)$$

积分常数 C_1, C_2 由边界条件决定:

$$\begin{aligned} z = 0, \quad u = 0, \quad C_2 = 0 \\ z = h, \quad u = 0, \quad C_1 = -\frac{k}{2\mu} h \end{aligned}$$

故速度分布为

$$u = -\frac{k}{2\mu} z(h-z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(z - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (6.66)$$

式(6.66)表明, 在恒定压强梯度作用下, 两固定平行平板间的速度为抛物线分布, 如图 6.5 所示, 称为泊肃叶流。最大速度位于中轴线 $z=h/2$ 上, 为

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (6.67)$$

(2) 流量与平均速度

单位宽度平行平板间的流量为

$$Q = \int_0^h u dz = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z^2 - hz)^2 dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (6.68)$$

平均速度为

$$\bar{V} = \frac{Q}{h} = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{2}{3} u_{\max} \quad (6.69)$$

(3) 切应力分布

由式(6.64)右边等式积分得 $p_1(x)$, 代入式(6.63), 得

$$p = -\rho g z + kx + C_3 \quad (6.70a)$$

利用边界条件 $p|_{x=0, z=0} = p_0$, 得法向压力分布为

$$p = p_0 - \rho g z + kx = p_0 - \rho g z + \frac{dp}{dx} x \quad (6.70b)$$

由牛顿黏性定律切应力表达式, 有

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z^2 - hz) \right] = \left(z - \frac{h}{2} \right) \frac{dp}{dx} \quad (6.71)$$

上式表明, 切应力沿 z 方向为线性分布, 见图 6.5, 在中轴线 ($z = h/2$) 上切应力为零, 在板面上 ($z = 0, h$) 为最大值, $\tau_{\max} = \pm (h/2)(dp/dx)$ 。

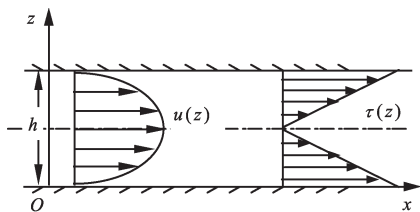


图 6.5 平板间泊肃叶流

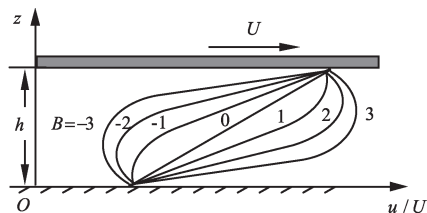


图 6.6 平板间库埃特流

6.4.2 平板间库埃特流

设下板固定, 上板以匀速 U 沿 x 方向运动。基本方程、已知条件和假设条件与 6.4.1 节相同, 仅边界条件不同, 即

$$\begin{aligned} z=0, \quad u=0, \quad C_2=0 \\ z=h, \quad u=U, \quad C_1=\frac{U}{h}-\frac{k}{2\mu}h \end{aligned}$$

代入式(6.65), 速度分布为

$$u = \frac{U}{h}z + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}(z^2 - hz) \quad (6.72)$$

无量纲形式的速度分布为

$$\frac{u}{U} = \frac{z}{h} + B\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{z}{h} \quad (6.73)$$

式中, $B = -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$, 为无量纲压强梯度。

式(6.72)和(6.73)代表了上板运动和压强梯度共同作用下的平板间流场, 称为库埃特流。 B 取不同值时, 无量纲速度廓线如图 6.6 所示, 分为三种情况。

(1) $B=0$, 即压强梯度为零时, 流体仅在上板带动下做纯剪切流动, 速度廓线是斜直线, 即

$$u = \frac{U}{h}z$$

称为简单库埃特流, 常用于测量流体黏度的装置中。

(2) $B>0$, 在顺压梯度(压降方向与流动方向相同)作用下的库埃特流, 速度廓线是直线与抛物线相加。

(3) $B<0$, 在逆压梯度(压降方向与流动方向相反)作用下的库埃特流, 速度廓线是直线与抛物线相减。此时, 在固定板一侧出现倒流, 这是逆向压差流大于正向剪切流的结果。该现象时常出现在钝体绕流的后部, 引起流动的分流, 造成压差阻力。

库埃特流中的切应力分布为

$$\tau = \frac{dp}{dx}z + \left(\mu \frac{U}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right) \quad (6.74)$$

当 U 和 dp/dx 均为常数时,切应力沿 z 方向为线性分布。

6.4.3 非定常库埃特流

当流动的边界条件随时间变化时,作用在流体上的外力和流体内部的相互作用力也都随之变化,从而引起流动随时间的变化。斯托克斯在 1851 年研究了一块平板突然以常速在自身平面内启动而引起的不定常流动问题,称为斯托克斯第一问题。

一块无限大平板的上半空间充满静止的不可压缩黏性流体,在 $t = 0$ 时刻平板突然在自身平面内从静止加速到匀速 U ,从而使流体做非定常运动。建立直角坐标系,如图 6.7 所示,使原点 O 在平板上, x 轴沿平板,其正向与平板运动方向一致, z 轴垂直于平板。设流体的运动黏度系数为 ν ,不计质量力,考察 xz 平面上流动的速度分布。

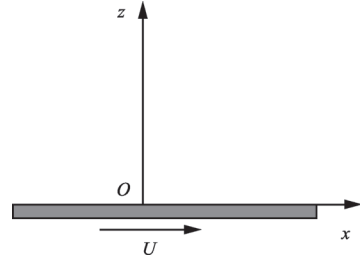


图 6.7 斯托克斯第一问题

流体做平面运动有 $v = 0, \partial/\partial y = 0$,平板沿 x 方向无限大使得 $\partial/\partial x = 0$,又因质量力不计,则 xz 平面上的基本方程组为

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.76a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.76b)$$

初始条件和边界条件为

$$u|_{t=0} = 0, \quad w|_{t=0} = 0 \quad (6.77)$$

$$u|_{z=0, t>0} = U, \quad w|_{z=0, t>0} = 0 \quad (6.78a)$$

$$u|_{z \rightarrow \infty, t>0} = 0, \quad w|_{z \rightarrow \infty, t>0} = 0 \quad (6.78b)$$

$$p|_{y \rightarrow \infty} = p_{\infty} \quad (6.79)$$

由条件(6.77)和(6.78)知,初始时刻和任一时刻在边界上 $w = 0$,又由方程(6.75),有

$$w \equiv 0 \quad (6.80)$$

上式代入方程(6.76b)有 $\partial p/\partial z = 0$,再考虑边界条件(6.79),得

$$p \equiv p_{\infty} \quad (6.81)$$

以上结果代入方程(6.76a),得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.82)$$

上述方程为一维热传导方程,可采用“相似解”的方法求解。为此,引进无量纲自变量和无量纲速度:

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{4\nu t}}, \quad u^* = \frac{u}{U} = f(\eta) \quad (6.83)$$

将其代入方程(6.82)和(6.78),得

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (6.84)$$

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \quad (6.85)$$

求解上述常微分方程及其定解条件问题,得

$$u^* = \frac{u}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (6.86a)$$

$$\text{或} \quad u = U \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \right) = U [1 - \text{erf}(\eta)] \quad (6.86b)$$

图 6.8 是 u^* 与 η 的关系曲线,无论 t, z 怎样变化,只要无量纲组合量 η 相同,对应的无量纲速度 u^* 就相同,即所谓的“相似解”。

6.5 相似理论与量纲分析

如前所述,只有对于一些简单的模型化流动,才可求得精确解。真实流动往往要复杂得多,以致求其精确解非常困难甚至完全不可能。要解决复杂的真实流动问题,一方面是采用各种近似理论或数值解法,另一方面是进行实验观测和模拟。实验观测可以是对原型流动的直接观测,也可以是对实验室中的模拟流动进行观测。由于经济和技术条件的限制,对原型流动的直接观测存在着极大的困难,有的甚至根本不可能。因此,很多情况下要在实验室中进行模拟试验,如飞机模型在风洞中的吹风实验、船舰模型在水槽中的拖动测量以及大气环流模拟实验和台风模拟实验等。但是,要使实验室模拟流动结果能够应用于原型流动,并扩展为一般的规律性认识,就必须使两者相似,即建立两者之间的变换关系。所谓模拟试验,指用简化及可控的方法实现与原型流动相似的试验。如何建立两流场相似的准则来判别两者的相似,或者说如何设计和组织试验,使模拟流动与原型流动相似,相似理论将帮助解决这个问题。

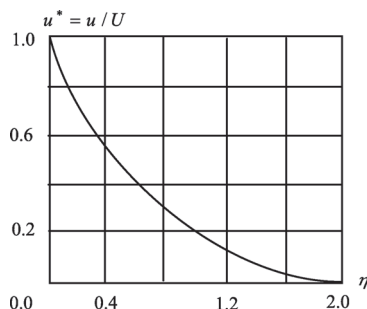


图 6.8 斯托克斯第一问题的相似解

量纲分析是确定相似准则的一种方法。它通过揭示物理量量纲之间存在的内在关系,对物理现象做定性或半定量分析。量纲分析法不仅用于指导模型试验,而且为理论分析提供重要信息,是研究新现象、开发新领域中行之有效的分析手段,广泛应用于包括流体力学在内的许多学科领域中。

6.5.1 相似概念

几何学中有几何相似的概念,但两系统物理现象的相似要比几何相似更复杂。两个流体力学系统的相似除了要求几何相似外,还必须满足运动相似、动力相似甚至热力相似等要求。

几何相似指两系统几何结构的对应夹角相等,对应长度成比例。运动相似要求几何相似的两系统在各对应点速度方向相同,速度大小成比例。动力相似要求运动相似的两系统在各对应点作用力方向相同,作用力大小成比例。热力相似要求动力相似的两系统在各对应点热力学量如温度等成比例。总之,两个系统的物理现象相似要求它们在各对应点的一切物理量成比例。

以上仅仅讨论了相似的基本概念,回答什么是相似的问题,实际上并不能以此来判别两系统是否相似,因为原型系统各物理量的空间分布和随时间的变化是未知的。

尽管不能预先知道两系统在各点、各时刻的物理量,但是在特定的物理现象或物理过程中,其物理量总是在一定范围内变化的,可以设法估计物理量的特征量。所谓物理量的特征量或特征尺度是指该物理量最具代表意义的值。例如,风速和河水的流速,一般在每秒几米到十几米的范围内变化,可取其特征量为 $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,则任意时刻任意点处的速度可表示为 $u = Uu^*$, u^* 是无量纲速度,数量级是 1,则称 U 为特征速度。又如对于圆柱绕流问题,可取特征量为圆柱直径,即 $L = 2a$,则空间坐标可表示为 $x = Lx^*$, $y = Ly^*$, x^* , y^* 是无量纲坐标,数量级也是 1,则称 L 为特征长度。有些物理量的特征量可由其他物理量的特征量决定。例如,特征时间可由特征长度和特征速度决定,即 $T = L/U$ 。确定特征量量级时,总要使相应无量纲量的量级为 1。

显然,如果两流体系统相似,则它们在各对应点处的物理量应与其相应的特征量成比例,即

$$\frac{x_i^{(1)}}{L^{(1)}} = \frac{x_i^{(2)}}{L^{(2)}} = x_i^*, \quad \frac{t^{(1)}}{T^{(1)}} = \frac{t^{(2)}}{T^{(2)}} = t^*, \quad \frac{u^{(1)}}{U^{(1)}} = \frac{u^{(2)}}{U^{(2)}} = u^* \quad (6.87)$$

式中,上标(1)和(2)表示两个不同系统。以上结果表明,欲使两流体系统相似,则它们应具有相同的无量纲量。这样,问题就变成各特征物理量之间应满足什么关系,才能使两系统的各无量纲量相同。

由于寻求的只是特征物理量之间的关系,满足这些关系的两系统并不是严格意义上的相似,故称为特征相似,这种相似更具有实际意义。事实上,根据不同的流动

特征,描述系统流动现象的特征量可以组成一系列无量纲数,称为相似准则数,只有这些相似准则数对应相等,两系统的流动现象才相似。因此,相似准则数是判断两系统流动现象相似的判据。

6.5.2 方程无量纲化和相似判据

确定相似判据有两种方法,一种是方程分析的方法,另一种是量纲分析的方法,先介绍方程分析的方法。

模拟流体流动实验时,模拟系统与原型系统在大小尺寸上不同,所用介质也不尽相同,但两系统过程的物理本质相同,应满足同一微分方程,只要初始条件和边界条件相似,就能保证两系统的流动现象相似。显然,支配两个相似流动现象或过程的无量纲方程也是相同的。如果将支配系统物理现象或过程的微分方程变成无量纲方程,则反映现象或过程特征的就是方程各项中所出现的无量纲系数,它们由特征量组成。要使两系统的无量纲方程相同,则这些无量纲系数对应相等,这些无量纲系数就是相似准则数。

下面以重力作用下不可压缩黏性流体的运动为例,通过对方程的无量纲化来确定相似判据。流动的控制方程为

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.89)$$

设 T, L, U 和 p_∞ 分别为特征时间、特征长度、特征速度和特征压强, g 为重力,引入无量纲:

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{U}, \quad g_i^* = \frac{g_i}{g}, \quad t^* = \frac{t}{T}, \quad p^* = \frac{p}{p_\infty} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.90)$$

代入方程(6.88)和(6.89),有

$$\left(\frac{U}{L} \right) \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} \right) = 0 \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U}{T} \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \left(\frac{U^2}{L} \right) \left(u_1^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_2^*} + u_3^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_3^*} \right) \\ & = (g) g_i^* - \left(\frac{p_\infty}{\rho L} \right) \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \left(\frac{\nu U}{L^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (6.92)$$

式中,各项前括号内的组合特征量就是该项的特征量,可以用来估计该项的量级。例如, U/T 是特征局地惯性力, U^2/L 是特征迁移惯性力, $p_\infty/(\rho L)$ 是特征气压梯度力, $\nu U/L^2$ 是特征黏性力。方程(6.91)除以 U/L , 方程(6.92)除以 U^2/L , 可得无量纲方

程：

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} & Sr \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_2^*} + u_3^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_3^*} \\ &= \frac{1}{Fr} g_i^* - Eu \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (6.94)$$

式中,各项前的系数记作

$$Sr = \frac{U/T}{U^2/L} = L/UT = \frac{\text{特征局地惯性力}}{\text{特征迁移惯性力}} \quad (6.95a)$$

$$Fr = \frac{U^2/L}{g} = U^2/gL = \frac{\text{特征迁移惯性力}}{\text{特征重力}} \quad (6.95b)$$

$$Eu = \frac{p_\infty/(\rho L)}{U^2/L} = \frac{p_\infty}{\rho U^2} = \frac{\text{特征气压梯度力}}{\text{特征迁移惯性力}} \quad (6.95c)$$

$$Re = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{特征迁移惯性力}}{\text{特征黏性力}} \quad (6.95d)$$

分别称为斯特劳哈尔(Strouhal)数、弗劳德(Froude)数、欧拉(Eular)数和雷诺(Reynolds)数。同理,引入上述无量纲数可将定解条件无量纲化。

为此,当对重力作用下的不可压缩黏性流体进行模拟实验时,在使模拟流动与原型流动几何相似基础上,只要使模拟流动与原型流动具有相同的 Sr 数、 Fr 数、 Eu 数和 Re 数,则它们的无量纲方程和定解条件就完全一样,从而它们的无量纲变量 u_i^* 和 p^* 对应相等。此时模拟流动和原型流动就是相似的。把 Sr 数、 Fr 数、 Eu 数和 Re 数称为相似准则数,它们是判别模拟流动与原型流动相似的判据。

以上四个相似准则数是流体力学现象相似的最基本的相似判据,在某些特殊问题中,还需要引入其他的相似判据。例如,研究可压缩流体流动,要引入马赫(Mach)数 $Ma = U/c$,它是流速与声速之比;研究转动参考系中的流动,要引入罗斯贝(Rossby)数 $Ro = U/(2\omega L)$,其中 ω 是参考系的旋转角速度;物理过程含有热现象时,要引入普朗特(Prandtl)数 $Pr = c_p \mu / \kappa$,其中 c_p 是比定压热容, κ 是热传导系数。

6.5.3 量纲分析

利用方程分析的方法,通过对支配方程的无量纲化来确定相似判据,前提是已经掌握支配方程的形式。而很多物理现象或过程的支配方程事先并不知道,为了建立有关物理量之间的规律性联系,需要借助量纲分析的方法,并可确定有关的相似判据。

(1) 量纲和量纲齐次性原理

任何物理量都包括大小和类别两个方面。物理量的大小可以用相应的单位表

示,单位的大小可人为规定。建立物理系统的单位制时,只要对少数几个彼此独立的物理量规定相应的单位,称为基本量(单位),其他量可根据物理量关系和定理导出,称为导出量(单位)。

物理量的类别称为量纲,表示物理量的物理属性。厘米、米、千米等同属长度类;毫克、克、千克等同属质量类;秒、分、小时等计时单位同属时间类;度(摄氏)、开尔文等同属温度类,等等。基本量的量纲称为基本量纲,任何导出量的量纲均可用基本量纲的幂次表示,称为量纲幂次式。例如,流体力学中三个基本量通常取为长度、质量和时间,量纲分别记为 L, M 和 T,其他任何物理量 Q 的量纲则可以表示为

$$\dim Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (6.96)$$

式中, α, β, γ 称为量纲指数。若涉及热现象,还应把温度 Θ 作为第四个基本量。表 6.1 中列举了国际单位制中导出量的量纲。

表 6.1 国际单位制中导出量的量纲

常用量			
速度	$\dim V = LT^{-1}$	加速度	$\dim g = LT^{-2}$
体积流量	$\dim Q = L^3 T^{-1}$	质量流量	$\dim \dot{m} = MT^{-1}$
密度	$\dim \rho = ML^{-3}$	重度	$\dim \rho g = ML^{-2} T^{-2}$
力	$\dim F = MLT^{-2}$	力矩	$\dim L = ML^2 T^{-2}$
压强	$\dim p = ML^{-1} T^{-2}$	应力	$\dim p = MLT^{-2}$
黏度	$\dim \mu = ML^{-1} T^{-1}$	运动黏度	$\dim \nu = L^2 T^{-1}$
其他量			
角速度	$\dim \omega = T^{-1}$	角加速度	$\dim \dot{\omega} = T^{-2}$
动量	$\dim p = MLT^{-1}$	动量矩	$\dim J = ML^2 T^{-1}$
能量(功)	$\dim E = ML^2 T^{-2}$	热能	$\dim E = ML^2 T^{-2}$
应变率	$\dim \epsilon_{xx} = T^{-1}$	功率	$\dim \dot{W} = ML^2 T^{-3}$
导热系数	$\dim k = MLT^{-3} \Theta^{-1}$	表面张力系数	$\dim \sigma = MT^{-2}$

导数和积分的量纲为

$$\dim \frac{dy}{dx} = \dim \frac{y}{x}, \quad \dim \frac{d^2 y}{dx^2} = \dim \frac{y}{x^2}, \quad \dim \int_a^b y dx = \dim yx \quad (6.97)$$

利用流体力学方程描述同类物理量(如作用力、动量、能量等)之间的定量关系时,若将方程中各项均用基本量纲的量纲幂次式表示,则各项的基本量纲必须齐次,称为量纲齐次性原理。以牛顿黏性定律为例,有

$$p_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{或} \quad \mu = \frac{p_{yx}}{du/dy}$$

等式左端物理量的量纲应该等于右端物理量的量纲,因此,动力黏度系数的量纲是

$$\dim \mu = \text{ML}^{-1} \text{T}^{-2} (\text{LL}^{-1} \text{T}^{-1})^{-1} = \text{ML}^{-1} \text{T}^{-1}$$

(2) 布金汉 Π 定理

量纲分析法主要用于分析流动现象中的未知规律,通过对有关物理量做量纲幂次分析,将它们组合成无量纲形式的组合量,用无量纲参数之间的关系式代替有量纲的物理量之间的关系,揭示物理量之间在量纲上的内在联系,降低变量数目,用于指导理论分析和实验研究。奠定量纲分析理论基础的是布金汉(Buckingham, 1914),他提出了 Π 定理,又称为布金汉 Π 定理。

布金汉 Π 定理: 如果在一个物理现象中有 n 个物理量 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, 其中只有 r 个量是量纲独立的, 则可以把 n 个物理量之间的函数关系式转变成 $n-r$ 个独立无量纲量之间的关系式, 这 $n-r$ 个独立的无量纲参数就称为 Π 数。

在流体力学中独立的基本量有 3 个, 分别是 M, L, T , 即 $r=3$ 。设某流动过程可用 n 个物理量描述, 如 Q_1, Q_2, \dots, Q_n , 则按 Π 定理这 n 个物理量可以并只可以组合成 $n-3$ 个独立的 Π 数。下面以光滑圆球在黏性流体中的运动阻力为例说明量纲分析法的一般步骤。

第一步, 列出所有相关的物理量。

本例中相关物理量共有 5 个: 阻力 R_D 、密度 ρ 、圆球速度 V 、圆球直径 d 和流体黏度系数 μ , 它们组成关系式:

$$R_D = \phi(\rho, V, d, \mu)$$

第二步, 选择包含不同基本量纲的物理量为基本量。

本例中 ρ 包含质量量纲, V 包含时间量纲, d 包含长度量纲, 它们互相独立, 可选择为基本量。

第三步, 将其余物理量作为导出量, 分别与基本量的幂次式组成无量纲 Π 数。

本例中导出量有两($5-3=2$)个, 即 R_D 和 μ , 它们的 Π 表达式分别为

$$\Pi_1 = \rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} d^{\lambda_1} R_D$$

$$\Pi_2 = \rho^{\alpha_2} V^{\beta_2} d^{\lambda_2} \mu$$

第四步, 用量纲幂次式求解每个 Π 表达式中的指数, 组成 Π 数。

本例中 Π_1 和 Π_2 的量纲幂次式分别为

$$\text{L}^0 \text{M}^0 \text{T}^0 = (\text{ML}^{-3})^{\alpha_1} (\text{LT}^{-1})^{\beta_1} \text{L}^{\lambda_1} (\text{LMT}^{-2})$$

$$\text{L}^0 \text{M}^0 \text{T}^0 = (\text{ML}^{-3})^{\alpha_2} (\text{LT}^{-1})^{\beta_2} \text{L}^{\lambda_2} (\text{L}^{-1} \text{MT}^{-1})$$

指数相等的方程分别为

$$\Pi_1: \begin{cases} M: & \alpha_1 + 1 = 0 \\ L: & -3\alpha_1 + \beta_1 + \lambda_1 + 1 = 0 \\ T: & -\beta_1 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \Pi_2: \begin{cases} M: & \alpha_2 + 1 = 0 \\ L: & -3\alpha_2 + \beta_2 + \lambda_2 - 1 = 0 \\ T: & -\beta_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解之 $\alpha_1 = -1, \beta_1 = -2, \lambda_1 = -2$ 和 $\alpha_2 = -1, \beta_2 = -1, \lambda_2 = -1$

由此得 Π 数表达式为

$$\Pi_1 = \frac{R_D}{\rho V^2 d^2} = C_D \quad \text{和} \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{Re}$$

式中,两个 Π 数分别为阻力系数 C_D 和雷诺数 Re 。

第五步,用 Π 数组成新的方程

新方程为

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

即

$$C_D = f(Re) \quad \text{或} \quad R_D = \rho V^2 d^2 \cdot f(Re)$$

通过本例实践,可以体会量纲分析法的实际意义。本例原来有 5 个物理量,若通过实验确定阻力 R_D 与另 4 个物理量之间的函数关系,按每个物理量改变 10 次获得一条实验曲线计算共需 10^4 次实验,其中要改变 10 次 ρ 和 μ ,实际上是不可能的。现在经过量纲分析后减少为 2 个无量纲参数 C_D 和 Re ,为确定函数关系 $C_D = f(Re)$,只需完成 10 次实验,而且 ρ, d, μ 均不变,仅改变 V 即可,由此大大提高了效率且经济性好。

运用 Π 定理进行量纲分析的关键在于第一步,即正确选择有关的物理量。若遗漏了必需的物理量将导致错误的结果,若引入了无关的物理量将使分析复杂化。要正确选择物理量,需掌握必要的流体力学知识和对流动有丰富的感性认识,并具有一定的量纲分析经验。

6.6 不可压缩黏性流体小雷诺数流动近似解

在自然界和工程技术中,常常需要讨论微粒在黏性流体中的缓慢运动。这些运动的特点是流体的惯性力与黏性力相比可以忽略不计或只占次要地位。这种流动叫作小雷诺数流动。大气科学中的云雾烟尘,风沙雪雨;物理化学中的胶体溶液;水利工程中泥沙在水流中的运动等,这些问题里的微粒、液滴或气泡的尺度大都在 μm 上下,运动速度很慢,可以看作小雷诺数流动。人的毛细血管直径约为 $10 \mu\text{m}$,平均血流速度约为 $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$,血液运动黏性约为 $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$,这样算出的雷诺数约为 10^{-3} ,所以,研究毛细血管中的血流可以忽略血流的惯性效应。地球物理学中由于地幔对流运动使得地球表面的板块运动引起大陆漂移,尽管地壳板块尺度是以 10^3 km 计,但地幔黏度很高($\mu \approx 10^{20} \text{ Pa} \cdot \text{s}$),板块运动极慢(每年约 4 cm),其特征雷诺数约为 10^{-20} 量级,因而尽管地幔运动的尺度很大,但仍当作小雷诺数流动处理。

小雷诺数流体力学问题研究已经取得了非常大的进展,感兴趣的读者可阅读有关专著,这里只通过不可压缩黏性流体中小球缓慢运动问题的研究来阐述小雷诺数流动的基本原理和处理方法。

设半径为 a 的小球以缓慢速度 U 在充满无限空间的不可压缩黏性流体中做匀

速直线运动。它等价于在无穷远处均匀来流绕小球的流动问题。关注小球附近的流场,取特征长度 $L=2a$,由于 a 和 U 都较小,则有

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{2Ua}{\nu} \ll 1$$

所以这是小雷诺数流动问题,反映黏性力项 $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ 远大于迁移惯性力项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 的流动。斯托克斯把迁移惯性力项完全略去,使 N-S 方程简化为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.98)$$

此式称为斯托克斯方程,遵从此方程的流动,称为斯托克斯流动。将问题限制在定常流动,不计质量力,则完备方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases} \quad (6.99)$$

建立以小球中心为原点的球坐标系,如图 6.9 所示,由于流动是轴对称的,有

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_r = V_r(r, \theta), \quad V_\theta = V_\theta(r, \theta), \quad p = p(r, \theta)$$

方程组(6.98)写为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \end{cases} \quad (6.100)$$

边界条件为

$$\begin{cases} v_r |_{r=a} = 0, \quad v_\theta |_{r=a} = 0 \\ v_r |_{r \rightarrow \infty} = U \cos \theta, \quad v_\theta |_{r \rightarrow \infty} = -U \sin \theta, \quad p |_{r \rightarrow \infty} = p_\infty \end{cases} \quad (6.101)$$

由于方程是线性的,可用分离变量法求解。令

$$v_r = f_1(r) \cos \theta, \quad v_\theta = -f_2(r) \sin \theta, \quad p - p_\infty = \mu f_3(r) \cos \theta \quad (6.102)$$

将方程(6.102)代入方程组(6.100),化简得

$$f_1' + \frac{2(f_1 - f_2)}{r} = 0 \quad (6.103a)$$

$$f_3' = f_1'' + \frac{2}{r} f_1' - \frac{4(f_1 - f_2)}{r^2} \quad (6.103b)$$

$$\frac{1}{r} f_3 = f_2'' + \frac{2}{r} f_2' + \frac{2(f_1 - f_2)}{r^2} \quad (6.103c)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_1(a) = 0, & f_2(a) = 0 \\ f_1(\infty) = U, & f_2(\infty) = 0, & f_3(\infty) = 0 \end{cases} \quad (6.104)$$

代方程(6.103a),得

$$f_2(r) = \frac{r}{2} f_1'(r) + f_1(r) \quad (6.105)$$

代入方程(6.103c),得

$$f_3(r) = \frac{r^2}{2} f_1'''(r) + 3r f_1''(r) + 2f_1'(r) \quad (6.106)$$

将以上结果代入方程(6.103b), $f_1(r)$ 的常微分方程变为

$$r^3 f_1^{(4)} + 8r^2 f_1''' + 8r f_1'' - 8f_1' = 0 \quad (6.107)$$

这是欧拉型的四阶常微分方程,具有 $f_1(r) = r^k$ 的形式解,代入方程(6.107),经整理得特征方程为

$$(k+3)(k+1)k(k-2) = 0$$

特征根为

$$k_1 = -3, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 2$$

于是方程(6.107)的通解为

$$f_1(r) = \frac{C_1}{r^3} + \frac{C_2}{r} + C_3 + C_4 r^2 \quad (6.108)$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 是积分常数。将上式代入方程(6.105)和(6.106),分别得

$$f_2(r) = -\frac{C_1}{2r^3} + \frac{C_2}{2r} + C_3 + 2C_4 r^2 \quad (6.109)$$

$$f_3(r) = \frac{C_2}{r^2} + 10C_4 r \quad (6.110)$$

利用边界条件(6.104)求得各积分常数的值为

$$C_4 = 0, \quad C_3 = U, \quad C_2 = -\frac{3}{2}Ua, \quad C_1 = \frac{1}{2}Ua^2 \quad (6.111)$$

注意,关于 $f_1(\infty), f_2(\infty)$ 的条件不是彼此孤立的,利用其中之一,将 $f_1(r), f_2(r), f_3(r)$ 代入方程(6.102),最后求得绕小球流动的速度场和压强场为

$$\begin{cases} v_r = U \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos\theta \\ v_\theta = -U \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin\theta \\ p = p_\infty - \frac{3a\mu}{2r^2} U \cos\theta \end{cases} \quad (6.112)$$

这个结果是斯托克斯在1851年首先求出的,称为斯托克斯近似解。

为了求得流体对小球的作用,先求出球面上的应力,如图6.10所示。利用球坐

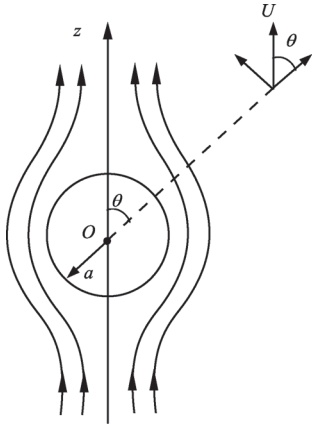


图 6.9 绕小球的小雷诺数流动

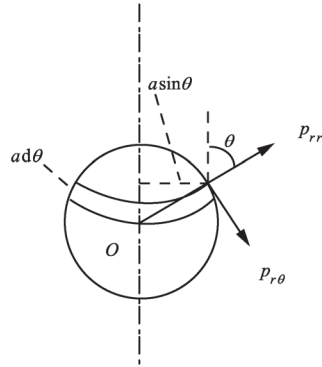


图 6.10 小球表面的应力

标系中的应力表达式(见附录 C),并令 $r=a$,有

$$\begin{cases} p_{rr} |_{r=a} = \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a} = -p_\infty + \frac{3r}{2a} U \sin\theta \\ p_{r\theta} |_{r=a} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)_{r=a} = \frac{3\mu}{2a} U \sin\theta \end{cases} \quad (6.113)$$

由对称性知,流体作用于小球表面的合力沿来流速度 U 的方向,其大小为

$$\begin{aligned} R &= \oint_{a_a} (p_{rr} |_{r=a} \cos\theta - p_{r\theta} |_{r=a} \sin\theta) d\sigma \\ &= \int_0^\pi (p_{rr} |_{r=a} \cos\theta - p_{r\theta} |_{r=a} \sin\theta) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi 3\pi\mu U a \sin\theta d\theta \\ &= 6\pi\mu U a \end{aligned} \quad (6.114)$$

它描述了小球在不可压缩黏性流体中缓慢运动时所受的阻力,称为斯托克斯阻力公式。容易求得阻力系数为

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{12\mu}{\rho U a} = \frac{24}{\frac{U 2a}{\nu}} = \frac{24}{Re} \quad (6.115)$$

斯托克斯解(6.115)只适用于小球表面附近,对于更大范围内的流场,特征长度 L 取较大的值时,不能保证 $Re \ll 1$,此时不能完全忽略迁移惯性力项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$,于是人们对斯托克斯提出了各种修正。

1910年,奥森(Oseen)令 $\mathbf{V} = U\mathbf{k} + \mathbf{V}'$,其中 \mathbf{V}' 在离小球充分远时是小量,于是 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \approx U \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial z}$, N-S 方程组简化为

$$U \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V}' \quad (6.116)$$

上式称为奥森方程,所求得的小球阻力系数表达式为

$$C_R = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re + O(Re^2) \right]$$

1957年,克普朗(Kaplun)等将奥森的结果进一步修正为

$$C_R = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln Re + O(Re^2) \right]$$

6.7 不可压缩黏性流体大雷诺数流动——层流边界层理论

物体在无界的静止黏性流体中运动,或无界的黏性流体绕物体流动时形成的流场称为外流问题。例如,飞机、汽车、火车等在空气中的运动,潜艇、鱼雷在水中的运动,气流绕大型建筑物的流动,影响气候和污染物扩散的大气在地面边界层的流动等,人们熟悉的大多数外流均属大雷诺数的流动,即 $Re \gg 1$ 。这是因为,一般物体的特征长度为 $0.01 \sim 10 \text{ m}$,当其在空气或水中以速度 $0.1 \sim 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动时,相应的 Re 数为 $100 \sim 10^9$ 。普通汽车和船舶以正常速度行驶时,空气和水的 Re 数均在 10^6 以上,飞机绕流的 Re 数则更高,因此,大 Re 数流动是普遍存在的现象。

对于大 Re 数流动, N-S 方程中的黏性力项 $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ 远比迁移惯性力项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 要小得多。但这里不能简单地略去黏性力项,因为如果这样,黏性流体运动的 N-S 方程就变成理想流体的欧拉方程,显然后者的解不能满足前者的边界条件。此外,完全略去黏性效应,也不能解释绕流物体所受到的阻力。事实上,在固壁附近,由于速度的切变很大,黏性效应是不能忽略的。图 6.11a 为均匀来流绕半无穷壁面流动的情形。在离壁面稍远处,接近来流速度 U ,在壁面上的速度为零,在壁面附近的速度切变 $\partial u / \partial y$ 很大,且 $\partial^2 u / \partial y^2$ 也大,黏性力项不能忽略。

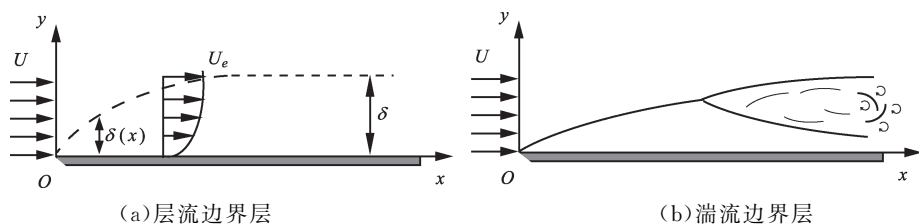


图 6.11 均匀来流绕半无穷壁面流动

1904年,普朗特提出将大雷诺数下的流场分为两个区域,一个是紧贴壁面非常薄的区域,称为边界层;另一个是边界层以外的区域,称为外流区域。边界层很薄,边

边界层厚度 δ 与物面尺度 L 之比 $\delta/L \ll 1$ 。在边界层内,速度切变 $\partial u/\partial y$ 很大,流动强烈有旋,黏性效应十分明显,黏性力与迁移惯性力量级。在外流区域,速度分布为均匀来流,黏性效应很小,可把流体看作理想流体,流动做无旋运动,因此,又称为势流区。外流区域的流动处理可以利用前面介绍的理想流体理论,而边界层区域的流动的研究需要建立新的理论模型。下面以不可压缩黏性流体绕平壁面的大雷诺数流动问题为例,介绍层流边界层理论。

6.7.1 边界层厚度

首先对边界层厚度做个估算。取 x 轴沿壁面,指向流动方向, y 轴沿壁面法线方向,原点在板前缘,来流为均匀流 U ,板长为 L ,可以估算边界层的特征厚度 δ 。在平板边界层内,黏性力量级大小为 $\nu \partial^2 u/\partial y^2 \sim \nu U/\delta^2$,惯性力量级大小为 $u \partial u/\partial y \sim U^2/L$,根据边界层内黏性力与惯性力量级相当的特点,有

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Re = \frac{UL}{\nu} \quad (6.117)$$

上式表明,边界层厚度与 \sqrt{Re} 成反比。若 $Re \geq 10^7$,计算得 $\delta \leq 0.0016L$,若 $L < 6 \text{ m}$,边界层厚度为毫米量级。若在离平板前缘距离为 x 的截面上,定义当地雷诺数为 $Re = \rho Ux/\mu$,按同样的方法可估算出当地层流边界层的厚度为

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu}{U}x} \quad (6.118)$$

上式表明,层流边界层的厚度与 \sqrt{x} 成正比,随着沿平板流动的深入,边界层厚度会不断增加。实验观察也表明,在平板前部边界层是层流,深入到一定距离后层流向湍流转化,变成湍流边界层,厚度也将明显增加,如图 6.11b 所示。

由于从边界层内到边界层外的速度分布沿 y 方向具有渐变特征,边界层没有严格意义上的界限,实际问题中常根据不同需要定义不同的边界层厚度。

(1) 几何厚度

对于壁面一定距离处,当速度达到外流区域势流速度 U_e 的 99% 时,其对应的垂直距离定义为边界层的几何厚度,常用 δ 表示。

(2) 排挤厚度

当均流流经壁面时,由于黏性效应部分流体被排挤到外流区域,其所占的流体厚度定义为排挤厚度,用 δ^* 表示。位移厚度物理图像是:因黏性效应使设想的无黏流体经壁面附近而亏损的质量,折算成无黏流体的流量,即 $\rho \delta^* U = \int_0^\infty \rho(U-u)dy$,若流体不可压缩,则有

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (6.119)$$

排挤厚度又称为质量损失厚度,或位移厚度,如图 6.12 所示。

(3) 动量损失厚度

当均流流经壁面时,由于黏性效应部分流体被排挤到外流区域,将这部分流体具有的动量折算成厚度为 θ 的无黏流体的动量流量,即 $\rho\theta U \cdot U = \int_0^\infty \rho u(U-u) dy$,若流体不可压缩,则有

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (6.120)$$

图 6.13 画出了动量损失厚度和排挤厚度对应面积的比较,显然动量厚度总是小于位移厚度,即 $\theta \leq \delta^*$ 。

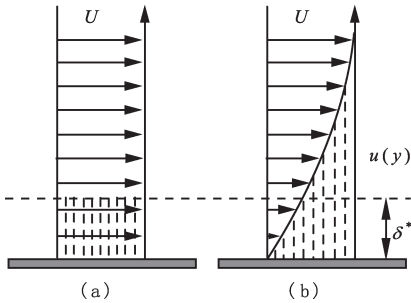


图 6.12 排挤厚度(取自丁祖荣(2003))

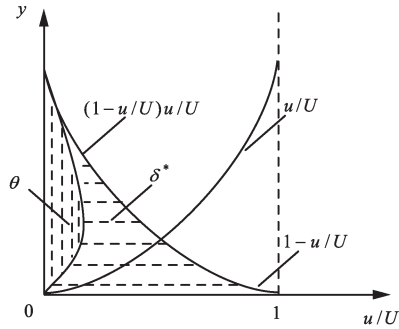


图 6.13 动量损失厚度(取自丁祖荣(2003))

6.7.2 普朗特边界层方程

下面以平壁面的二维流动为例,推导普朗特边界层方程。

对于不可压缩黏性流体二维定常层流边界层流动,可用二维连续性方程和 N-S 方程描述(不计质量力),则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.121a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.121b)$$

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \epsilon^2 \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (6.121c)$$

$$\epsilon \frac{U^2}{L} \quad \epsilon \frac{U^2}{L} \quad \epsilon \frac{U^2}{L} \quad \epsilon^2 \frac{U^2}{L} \quad \epsilon \frac{U^2}{L}$$

同时列出了方程中各项量级的大小。所用尺度分析的依据如下：取 x 方向特征长度和特征速度分别为 L 和 U ， y 方向特征长度为 δ ，由连续性方程可知 y 方向特征速度为 $\delta \cdot U/L$ ，考虑 x 和 y 方向的气压梯度力与各自方向的惯性力同量级，另由式(6.118)可知特征黏性系数为 $\delta^2 \cdot U/L$ 。因 $\epsilon = \delta/L \ll 1$ 为小量，普朗特略去了含 ϵ 的项，并保留 y 方向气压梯度力的高阶量，将方程(6.121) 化简为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.122a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.122b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.122c)$$

方程(6.122) 就称为普朗特边界层方程。考虑到方程中 $\partial p/\partial y = 0$ ，用边界层外缘的压强 p_e 代替同一截面边界层内的压强，则有 $\partial p/\partial x = dp/dx = dp_e/dx$ ，而在外流区域，流体的运动为无旋势流，利用拉格朗日积分 $U_e^2/2 + p_e/\rho = \text{常数}$ ，得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx}$$

因此，普朗特边界层方程又可写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.123a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.123b)$$

边界条件是

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad u|_{y \rightarrow \infty} = U_e(x) \quad (6.124)$$

与方程(6.121) 相比，边界层方程(6.123) 的主要优点是：① 在边界层内压强沿 y 方向保持不变，即边界层外的压强可以穿透边界层作用到壁面上，压强沿 x 方向的变化完全由外部势流决定，因此，对边界层内流动，压强可看作已知量；② 虽然仍保留非线性对流项，但由于对 x 的二阶偏导数项消失，相关的数值计算更容易。

必须指出，普朗特边界层方程不适用于边界层的前缘区，因为 $\delta(x)/x$ 已不再是小量。通常规定一个 x_0 值，使

$$\frac{\delta}{x_0} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}} = 0.2$$

即普朗特边界层方程适用于边界层内 $x > x_0$ 的区域。

6.7.3 平板层流边界层的布拉休斯解

对于均匀来流流过无限长平板的边界层流动, $U_e = U$ 与 x 无关, 普朗特边界层方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.125a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.125b)$$

引入流函数 ψ , 有速度场为 $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$, 则方程(6.125b)变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad (6.126)$$

相应的边界条件为

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y \rightarrow \infty} = U \quad (6.127)$$

方程(6.126)为三阶非线性偏微分方程, 布拉休斯将其化为常微分方程, 并求出其相似性解,

假定速度 $u(x, y)$ 的分布具有“相似性”, 即

$$\frac{u}{U} = f(\eta)$$

式中, $\eta = y/\delta(x)$, 代入式(6.118)后有 $\eta = y \sqrt{U/(\nu x)}$ 。利用

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = u = Uf(\eta) \quad \text{或} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \sqrt{\nu x U} f(\eta) \quad \text{或} \quad \psi = \sqrt{\nu x U} F(\eta)$$

式中, $\frac{dF}{d\eta} = f(\eta)$ 。将 ψ 表达式代入方程(6.126), 整理后常微分方程为

$$F'''(\eta) + \frac{1}{2}FF''(\eta) = 0 \quad (6.128)$$

相应的边界条件是

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1 \quad (6.129)$$

1908年, 布拉休斯首先提出方程(6.128), 并用级数解法求出了它的解, 其结果绘制成无量纲速度廓线, 理论结果与尼古拉兹实验结果一致, 见图 6.14。后人将方程(6.128)称为布拉休斯方程, 它的解称为布拉休斯解, 函数 $F(\eta)$ 称为布拉休斯函数或边界层函数。

6.7.4 卡门动量积分方程

普朗特边界层方程相对于 N-S 方程得到了大大简化, 但非线性项仍然存在, 只有在少数外流速度已知情形下可以找到相似解, 而在外流速度分布任意情形下求解

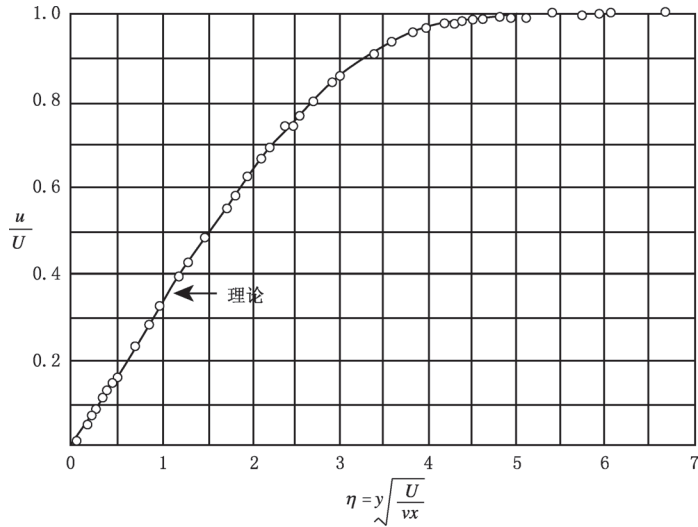


图 6.14 布拉休斯解的理论与实验结果比较(取自章梓雄等(1999))

一般是很困难的。为此,卡门推导了边界层动量积分形式的关系,称为卡门动量积分方程,该方程在工程中得到广泛的应用。

下面以平板边界层为例,推导卡门动量积分方程。

在平板定常流边界层取单位宽度控制体 $OABC$, 见图 6.15, 其中 AB 为边界层外一条流线, 与边界层外边界相交于 B 点, 在 AB 线上无流体进出, 切应力为零。设 OA 线上流速为 U 且压强相同, OC 线上黏性切应力 τ_w 对平板的合力为 $F_D = \int_0^x \tau_w dx$ 。由定常流动动量方程:

$$\oint_{CS} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum \mathbf{F} \quad (6.130)$$

沿 x 方向分量式为

$$\int_0^{\delta} \rho u \cdot u dy - \int_0^h \rho U \cdot U dy = -F_D \quad \text{或} \quad F_D = \rho U^2 h - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \quad (6.131)$$

由 CB 和 OA 两截面质量守恒, 有

$$\int_0^{\delta} u dy = Uh \quad \text{或} \quad h = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} dy \quad (6.132)$$

将式(6.132)代入式(6.131), 整理得

$$F_D = \rho U^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \rho U^2 \theta \quad (6.133)$$

式中, θ 为动量损失厚度。将式(6.133)对 x 求导数, 并考虑 $dF_D/dx = \tau_w$, 可得

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (6.134)$$

用壁面摩擦系数表示为

$$C_w = \frac{\tau_w}{\rho U^2/2} = 2 \frac{d\theta}{dx} \quad (6.135)$$

式(6.134)和(6.135)均称为平板边界层的卡门动量积分方程。可见,只要知道边界层的动量厚度,就可以利用该方程求平板上的切应力分布 $\tau_w(x)$ 和阻力 F_D 。

若边界层外自由来流速度不是常数,若 $U=U(x)$,则边界层外边界上存在压强梯度, $dp/dx = -\rho U dU/dx$,此时作用在边界层动量方程控制体上的外力,除黏性阻力外还有压强合力,相应的动量方程为

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx}(U^2\theta) + \rho\delta^* U \frac{dU}{dx} \quad (6.136)$$

式中, δ^* 为位移厚度,上式称为非零压强梯度二维边界层动量积分方程。当 U 为常数时,式(6.136)化为式(6.134)。

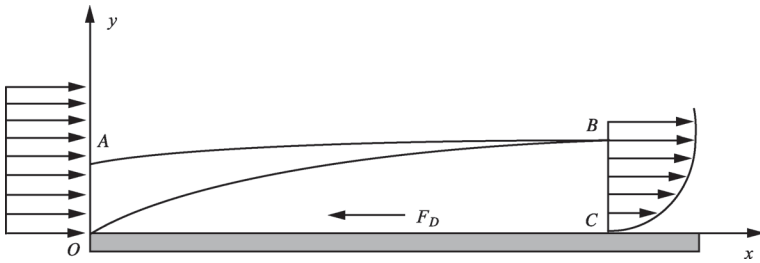


图 6.15 平板边界层

6.8 湍流引论

湍流(又称紊流)是一种普遍存在的流动状态,从大气中近地表的微风到大尺度的大气环流,江河湖泊中的水流,血液在血管中的流动,舰船、飞机、火箭等后部的尾流以及工程中大部分流动都常以湍流状态存在着。湍流与层流迥然不同,层流的流线是光滑的,各层流体层次分明,流动各物理量随时间和空间做光滑和平缓的连续变化;而湍流却是一种复杂的流动,流线或迹线杂乱无章,各层之间有强烈的混合现象,从表面上看,流动各物理量随时间、空间的变化极不规则。从整体上看,对湍流完全的数学描述是极其困难的,甚至根本不可能对每个特定的流动进行严格时间相关的数学描述。但是,这种紊乱无规则流动,并不意味着它是毫无规律性的。人们在研究湍流时主要从以下四个方面去探索,即湍流的统计理论、半经验理论、湍流的物理模

型——涡结构,以及湍流与非线性动力学、混沌理论的联系。

1959年,兴兹(Hinze)在论述湍流特性时曾指出:“湍流是这样一种不规则运动,其流场各种物理量是时间和空间的随机变量,因此,其统计平均值是有规律的。”这说明从统计理论的角度看,湍流的主要特征在于它具有随机性质,一方面它的物理量随时间和空间做紊乱而无规则的变换,另一方面它又具有确定的统计平均值。统计理论在研究湍流问题中具有重要作用,它采用较严格的统计方法研究湍流的基本规律,但仅限于最简单的均匀各向同性湍流,它的许多结果还不能完全用来解决湍流的实际问题。

湍流的半经验理论主要通过脉动的结构做某种假定,着重研究时均流的运动规律,目前已初步解决了湍流的一些实际问题。半经验理论的主要缺陷在于对湍流的内部结构缺少认识,因而其基本假定的物理依据不足,具有较大的局限性。

20世纪60年代,通过对湍流物理机制的不断探索,人们认识到多数剪切湍流的本质是由大尺度涡旋运动所支配的,这些涡旋运动不是随机和无序的,而是有组织的拟序结构。以后,应用拟序结构思想来研究湍流,尤其是在数值运算中应用大涡模拟方法,取得了长足的进步,目前这一方向仍在发展中。

20世纪70年代,人们在提出应用非线性动力学、混沌理论来研究湍流。由于在混沌系统中,随着系统的参数变化,会经历稳定解、周期解、准周期解以及杂乱无章的混沌解,而这些正是湍流产生和发展过程中所具有的特征,因此受到人们的普遍重视,目前该方向的研究正在发展之中。

总之,湍流理论到现在为止尚未达到成熟阶段,人们对于湍流的物理本质、内部结构和运动规律的认识还不够深入,有待于进行长期、深入的研究,本节仅对湍流理论做简单介绍。

6.8.1 湍流产生与随机性

(1) 雷诺实验

黏性流体流动存在着完全不同的两种流动状态——层流和湍流。早在1883年,英国物理学家雷诺曾经用实验方法研究真实流体的流动情况,并首先发现流体在玻璃管中流动时会出现两种完全不同性质的流动状态。

雷诺的实验装置主要是有一根插入贮水箱中的长玻璃管,在管的入口处通入一光滑的不断流出染色液的喷嘴,管的另一端装有一个阀门控制流动速度,如图6.16所示。逐渐打开出口处的阀门,水即从管内流出,同时打开喷嘴开关,自喷嘴流入管中一丝有色液体。当流速较低时,管中出现一条有色的直线,色线清晰,流动层次分明,互不干扰,这种流动称为层流,如图6.17a所示。调节阀门使流速增大,当达到某一值时,有色线出现弯曲,见图6.17b,这种情况说明管中层流已开始失稳。若流速进

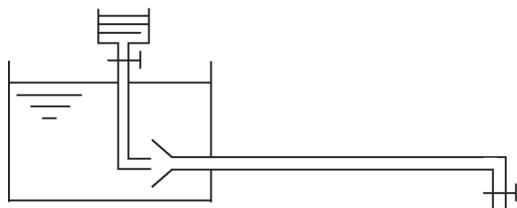


图 6.16 雷诺的实验装置

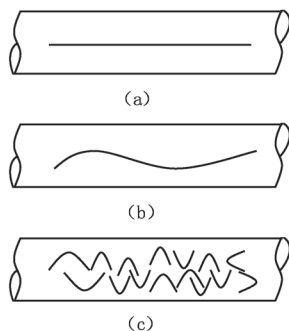


图 6.17 (a)层流;(b)过渡状态;(c)湍流

一步增大,并超过某一临界值 V_c 时,流动状态突然改变,色线离开喷嘴后即很快地混溶于管中的水,因而有色液体充满整个管中,如图 6.17c 所示。这时管中液体质点的运动十分复杂,貌似无规则运动,相互之间发生撞击,这种流动称为湍流。由此反过来减少管中流速,当小至某一临界值 V'_c 时,管中的流动又由湍流变成层流。实验证明:两个临界速度值并不相同,且 $V'_c < V_c$,故 V_c 称为上临界速度,而 V'_c 称为下临界速度。人们还发现,在直径不同管子及不同液体中做实验时,流体在管中的流态变化仅与雷诺数 $Re = Vd/\nu$ 有关,其中 V 为流速, d 为圆管直径, ν 为流体的运动黏度系数。于是, $Re^* = V_c d/\nu$ 称为上临界雷诺数, $Re^{**} = V'_c d/\nu$ 称为下临界雷诺数。

大量的雷诺实验表明,流态变化要经历三个阶段:

① $Re < Re^{**}$, 流动处于稳定层流状态,不论扰动如何强烈,一旦扰动消失,流动仍恢复为层流状态。对圆管中的流动, Re^{**} 为 2000;

② $Re^{**} < Re < Re^*$, 此时流动处于过渡状态,可以是层流,也可以是湍流,并存在层流与湍流相混的现象。当扰动消失后,流动不会恢复到原来的状态;

③ $Re > Re^*$, 此时流动非常不稳定,任意小的扰动都会扩大,并使流动很快发展成湍流,圆管流动的上界雷诺数为 5000,它与管的光滑度及流动平稳性有关,随着实验技术的改进,已可将上临界雷诺数提高到 10^5 。

进一步讨论层流向湍流过渡的物理本质。

在实际流动中不可避免地存在各种扰动,例如壁面的粗糙、外界影响等,这些扰动将会破坏流体平滑的流动。另一方面,在实际流体中总存在着黏性,黏性应力会消耗扰动的动能,使流动趋于稳定。如果黏性的稳定作用占支配地位,则流体虽有扰动,也将逐渐衰减,使得流体做层流运动;如果扰动占支配地位,则黏性的稳定作用无法使扰动缩减,扰动不断增大,使得流体层流状态被彻底破坏而转变为湍流。

在相似理论中已经讨论过,特征雷诺数是特征迁移惯性力和特征黏性力的比值,它反映黏性作用在流动中的地位,雷诺数小表示黏性对流动起着重要影响,即黏性稳

定作用占重要地位,因此,流体会处于层流状态;反之,当雷诺数增大并超过某一数值,则由于黏性稳定作用太小,无法克服扰动,因此,流动状态就会转变成湍流。

以上分析了由层流向湍流过渡以及雷诺数作为流动状态判别依据的物理本质。因此可认为,层流向湍流过渡的最初阶段其实就是层流的稳定性问题,也就是说,在层流中附加一个微小扰动,如果扰动随时间的推移而衰减,则流动将是稳定的;如果随时间的推移扰动得到加强则层流是不稳定的,从而可能过渡到湍流状态。以此为基础,从数学上论证层流向湍流的过渡问题,称为层流不稳定性理论,有兴趣的读者可阅读有关专著。

(2) 湍流随机性

由于固壁的影响和外部的扰动,在流体内部充满着大小、方向均不同的涡旋,这些涡旋不断地产生、发展、衰减、消亡。从理论上可以证明,没有涡旋存在就不能维持湍流。这些涡旋的运动和基本流动叠加后就形成了流动速度的脉动。例如,在基本流速为 U 的流体中有两个紧挨着的涡旋,其旋转角速度分别为 ω_1 和 ω_2 ,边缘上的线速度分别为 v_1 和 v_2 。这两个涡旋紧接着通过空间某一点 A ,如图 6.18 所示,于是 A 点上的速度会从 $U + v_1$ 突然变为 $U - v_2$ 。由于流体中存在着大大小小、方向各异的涡旋,所以必然引起流场中各空间点流速的大小和方向发生极不规则的变化。流速随时间的这种极不规则变化称为流速的脉动。

如果用瞬时流速仪测量湍流中任一点的流速,其结果与图 6.19 所示的曲线类似。它表明流速的数值是极其紊乱、毫无规则的。图中实线和虚线分别表示在相同条件下两次测量的结果。可以看出,流速的变化是完全不同的。但实测资料表明,如将不同的时段测得的数值加以平均,所得到的平均值是相当稳定的,如图中的直线。

由此可见,每一瞬时测量的结果毫无规律,但一个足够长时段测量结果的平均值是有一定规律的,这就是随机现象的基本特征。正因为湍流具有随机性,所以统计方法在湍流问题的研究中具有重要意义。

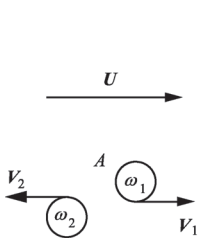


图 6.18 涡旋引起速度突变

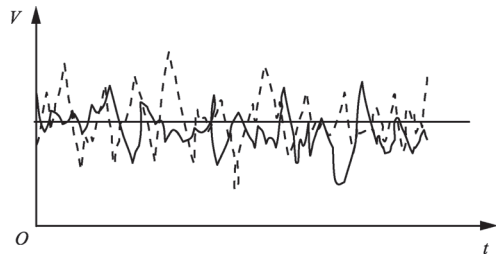


图 6.19 瞬时流速不规则变化

在湍流理论中,有三种统计平均方法,它们是时间平均法、空间平均法和概率平均法。根据概率论的各态遍历原理,一个随机量在重复多次试验中出现的所有可能状态,能在一次试验中相当长的时间内或相当大的空间范围内,以相同的概率出现。因此,三种统计平均方法的结果是一致的。下面着重介绍常用的时间平均法(简称时均法)。

在固定时空点 (x, y, z, t) ,物理量 A 在时间 T 内的平均值称为时均值,即

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(x, y, z, t) dt \quad (6.137)$$

式中, T 是以时刻 t 为中心的一段时间间隔,并称为时均周期。于是时均速度 \bar{u}_i 就是在时间间隔 T 内,流体通过某一固定时空点的速度沿 x_i 轴分量的平均值,即

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i(x, y, z, t) dt$$

类似地,时均压强为

$$\bar{p}_i = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p_i(x, y, z, t) dt$$

通常将瞬时值与时均值的差值称为脉动值 A' 。因而瞬时值等于时均值与脉动值之和,即

$$A = \bar{A} + A' \quad (6.138)$$

例如, $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ 和 $p = \bar{p} + p'$ 。脉动值 A' 可正可负,它显示出湍流的不规则性。应该注意,时均值与脉动值的大小往往因 T 选择的不同而异,例如,以1分钟为周期的平均风速和以1小时为周期的平均风速,一般说来是不相等的,但是,通常时均周期 T 都取得不是很大。在气象台站地面观测中,通常以某时刻附近1分钟的平均风速作为该时刻的风速。该风速值实际上是湍流风速的时均值。

由于湍流的随机性,它必然是极为复杂的非定常流动,各点的物理量随时间无规则地变化。但是当对各点的物理量取时均值后,其时均值有可能是相当稳定的,可以作为定常流动来处理,这种流动称为定常型湍流。本书的讨论仅限于定常型湍流。要注意的是,这里所谓的“定常”,仅仅指时均值不随时间而变化。

时均值和脉动值具有下列性质:

① 时均值再取时均仍为原时均值,即 $\overline{\bar{A}(t)} = \bar{A}$;

② 脉动值的时均值等于零,即 $\overline{A'} = \overline{A - \bar{A}} = \bar{A} - \bar{A} = 0$;

③ 脉动值乘以常数的时均值为零,即 $\overline{cA'} = c\overline{A'} = 0$;

④ 脉动值与任一时均值乘积的时均值为零,即 $\overline{A'\bar{A}} = \bar{A}'\bar{A} = 0$;

⑤ 瞬时值对空间坐标偏导数的时均值,等于时均值对同一坐标的偏导数,

$$\text{即 } \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial x};$$

⑥ 瞬时值对时间偏导数的时均值, 等于时均值对时间的偏导数, 即 $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$;

⑦ 两个时均值乘积的时均值, 仍等于两个时均值的乘积, 即 $\overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 = \overline{A_1 A_2}$;

⑧ 两个瞬时值乘积的时均值, 等于两个时均值的乘积加上两个脉动值乘积的时均值, 即 $\overline{A_1 A_2} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \overline{A'_1 A'_2}$;

⑨ 脉动值乘积的时均值应为 $\overline{A'_1 A'_2} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A'_1 A'_2 dt$;

⑩ 脉动值平方的时均值应为 $\overline{A'^2} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A'^2 dt$ 。

6.8.2 湍流基本方程

雷诺认为, 流动由层流状态过渡到湍流状态后, 尽管流动的性质发生了变化, 但流体的物理性质并没有改变。不论湍流内部结构如何复杂, 湍流中最小尺度的湍流微团仍比分子平均自由程大好几个数量级, 克努森数仍远小于 1, 流体的连续性没有受到破坏, 因此仍然可作为连续介质处理。另一方面, 不论湍流的运动如何复杂, 牛顿定律仍然适用, 流体的黏度系数没有改变, 于是黏性流体的 N-S 方程对于湍流仍然是成立的。下面以此假定为基础, 推导不可压缩流体的湍流基本方程。

(1) 连续性方程

对于不可压缩流体, 直角坐标系中连续性方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.139)$$

式中, u, v, w 为湍流瞬时速度 \mathbf{V} 在直角坐标系中的分量。将 $u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w'$ 代入上式, 有

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.140)$$

对上式求时均, 则有

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (6.141)$$

将式(6.140)减去式(6.141), 得

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (6.142)$$

式(6.139), (6.141)和(6.142)都是不可压缩流体湍流运动的连续性方程。上述各

式分别表明,在不可压缩流体湍流的连续性流动中,其瞬时速度、时均速度和脉动速度的散度均等于零。研究湍流时均流动时,常用式(6.141),它称为不可压缩流体湍流时均流动的连续性方程。

(2)时均动量方程——雷诺方程

考虑不可压缩均质黏性流体中无质量力作用的情形。由 N-S 方程,在 x 方向的分量为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (6.143)$$

利用连续性方程(6.139),则上式可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (6.144)$$

将上式中各物理量的瞬时值用时均值和脉动值之和代入,并注意到不可压缩均质流体 $\rho = \bar{\rho}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v')}{\partial y} \\ + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w} + \bar{u}w' + u'\bar{w} + u'w')}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u} + u') \end{aligned} \quad (6.145)$$

对上式取时均,并考虑到时均值和脉动值的性质及利用连续性方程(6.141),经整理后可得下式中的第一式,其余两式可用同样方法求得,即

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho \overline{u'w'}) \right] \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho \overline{v'w'}) \right] \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{w'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{w'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho \overline{w'w'}) \right] \end{aligned} \right. \quad (6.146)$$

上式就是不可压缩黏性流体湍流时均动量方程,称为雷诺方程。雷诺方程左端表示平均速度的随体导数,右端第一项为气压梯度力的时均值;第二项是作用于单位质量流体黏性力的时均值,这两项与层流状态 N-S 方程中的各项是相对应的。雷诺方程中右端第三项出现了附加应力。三个方程中共有九个附加应力分量。这些附加应力分量组成一个张量,称为雷诺应力张量,用 \mathbf{P}' 表示,即

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'u'} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'v'} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'w'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_{xx} & p'_{xy} & p'_{xz} \\ p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz} \\ p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.147)$$

显然,雷诺应力张量是二阶对称张量,所以,九个应力分量中只有六个独立分量。雷诺应力 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ 的物理实质是由于湍流脉动引起单位面积上的动量输运率。

雷诺方程和连续性方程都适用于湍流时均运动。然而这组方程有十个未知量(包括三个时均流速分量、时均压强和六个雷诺应力),而方程只有四个,故方程组不完备。在层流理论中,利用斯托克斯黏性应力公式,把黏性应力和形变率联系起来,解决了层流问题方程组的完备性。在湍流理论中,必须对雷诺应力补充相关的物理方程,才能使时均方程组完备,这一研究领域称之为湍流模式理论。所以,湍流模式理论的中心问题是建立雷诺应力的物理方程。

(3) 湍流能量方程

如前所述,湍流场的瞬时速度由两部分组成,因而湍流场的平均动能亦由两部分组成,即

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (6.148)$$

上式右端第一项为时均流动能,而第二项为脉动流动能(亦称湍能)。研究表明,这两种能量之间是否发生能量的相互转移以及通过何种方式的转移,是湍流状态维持与发展的内在动因。这里重点讨论这两种能量的控制方程。

用 \bar{u}_i 乘以雷诺方程(6.146),经整理可获得时均流动能的演化方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_k \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) - \frac{\bar{p}}{\rho} \bar{u}_k - \bar{u}_i \overline{u'_i u'_k} \right] - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (6.149)$$

上式右端第一项表示时均流动能的扩散;第二项显然不大于零,其代表了时均流动能的耗散率;第三项为雷诺应力所做的变形功,正是它描述了时均流动能与湍能之间的能量转移。

用 u'_j 乘以瞬时流场的 N-S 方程并取平均,再利用式(6.149),经整理可获得湍能的演化方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_k \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \right) - \frac{\overline{p'}}{\rho} u'_k - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} \right] - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (6.150)$$

上式与式(6.149)相似,其右端第一项表示湍能的扩散;第二项相应为湍能的耗散率;第三项与式(6.149)中对应项大小相等符号相反,表明雷诺应力所做变形功使时均流

动能减少(或增加)的同时,使湍能增加(或减少)同等大小的能量,可见该项是决定时均流动能与湍能之间相互交换的能量。一般情形下, $-\overline{u'_i u'_k} \partial \bar{u}_l / \partial x_k > 0$, 表明能量常常从主流(时均流)能量传递给湍能,从而使脉动场不断获得能量而维持发展下去。

从两方程(6.149)和(6.150)右端第二项可知,能量的耗散通过分子黏性耗散作用完成,这种耗散反过来又促使脉动的衰减及消亡。因此,湍能耗散率 $\epsilon = \nu (\overline{\partial u'_l / \partial x_k})(\overline{\partial u'_l / \partial x_k})$ 也是湍流研究中重要的统计物理量,其控制方程可通过下列步骤获得:用方程(6.145)减去方程(6.146)得到关于脉动值 u'_i 的方程,对其求一次偏导,并乘以 $2(\nu/\rho) \partial u'_i / \partial x_j$,最后取平均后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k \epsilon)}{\partial x_i} = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} - \overline{\epsilon u'_k} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\overline{p'}}{\rho} \right) \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right] - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_m}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \\ & - 2\nu \overline{u'_l \frac{\partial u'_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{u}_m}{\partial x_k \partial x_l}} - 2\nu \frac{\partial u'_m}{\partial x_k} \frac{\partial u'_m}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u'_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 u'_m}{\partial x_k \partial x_l} \end{aligned} \quad (6.151)$$

上式右端第一项为扩散项,包括黏性扩散和湍流扩散;第二、三项均为产生项;第四项代表小涡的拉伸作用;第五项不大于零表示黏性对 ϵ 的破坏作用。

6.8.3 湍流模式理论

在获得湍流的时均基本方程后,为了求解方程组,必须解决方程组的完备性问题,即建立雷诺应力和时均速度场之间的关系,其关系通常又称为湍流模式。根据这种关系所包含偏微分方程的数目,可将湍流模式分为零方程模式、一方程模式及二方程模式等,零方程模式就是不引入附加的偏微分方程而只引入附加的代数关系。

(1) 零方程模式

零方程模式是由一些近似处理雷诺应力的半经验公式发展而来,如普朗特混合长理论、卡门湍流相似理论等。实质上,这些理论是依据布西内斯克(Boussinesq)仿照分子运动黏性系数提出的涡黏性系数假定,将雷诺应力的一般表达式构造为

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (6.152)$$

式中, $K = \frac{\overline{u'_k u'_k}}{2}$ 为湍能, ν_t 称为涡黏性系数。涡黏性系数与分子运动黏性系数有相同的量纲,但与之有本质的不同。分子运动黏性是流体本身的属性,而涡黏性是流体运动的特性。一般来说,涡黏性系数不是一个常数,如何确定涡黏性系数是湍流模式理论的主要任务。所谓零方程模式就是指不引入微分方程而只用某种代数关系将涡黏性系数表示为时均速度场的函数,故有时也称为代数模式。

以二维平行流运动为例,在混合长理论中,有

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (6.153)$$

式中, \bar{u} 为平行于壁面的平均速度, y 为垂直壁面的坐标, l 称为混合长度。在靠近壁面处的充分发展湍流区内, 混合长度可表示为

$$l = \alpha y \quad (6.154)$$

式中, α 为比例常数, 由试验确定。在卡门湍流相似理论中, 有

$$l = \kappa \left| \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \right| \quad (6.155)$$

式中, $\kappa=0.4$ 为卡门常数。在零方程模式中, 二维平行流运动的雷诺应力可表示为

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.156)$$

由此, 建立了雷诺应力与时均速度的关系。

普朗特混合长理论在一定条件下可以解决一些问题, 例如在大气科学中用于研究近地面层平均风速铅直分布问题等。但其理论本质上也存在严重的局限, 如该理论是以流层存在时均速度梯度为前提的。若 $\partial \bar{u}/\partial y=0$, 则 $u'=0$, 且 $v_t=0$, 然而试验表明, 在时均流速度梯度为零的区域, 脉动速度并不为零。卡门湍流相似理论可从时均速度的空间分布(一阶导数和二阶导数)确定特征长度(即普朗特理论中的混合长度), 从而也就完全确定了雷诺应力, 这是后者比前者理论优越之处。但是卡门理论也同样存在着本质性的缺陷, 例如脉动场的相似性假设缺乏坚实的物理根据。

(2) 一方程模式及二方程模式

零方程模式只能应用于比较简单的流动问题, 这些流动问题往往只有一个剪切应变率起主要作用。对于稍微复杂一些的流动, 零方程模式的效果就不理想了, 其根本原因还是零方程模式中的涡黏性系数没有直接与表征湍流特性的参量联系起来。

研究表明, 湍流中反映脉动与主流相互作用的涡黏性系数由湍能 K 及湍能耗散率 ϵ 决定, 即

$$\nu_t = c_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (6.157)$$

式中, c_μ 为经验系数。上式称为普朗特-柯尔莫哥洛夫关系式。因此, 确定涡黏性系数的问题就转化为确定湍能 K 及耗散率 ϵ 的问题。类比浓度、温度等梯度型扩散规律, 将湍能方程(6.150)中扩散项“模式化”为

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] \quad (6.158)$$

式中, 第一项仍为分子黏性扩散; 第二项则为湍流扩散, 参数 σ_K 称为普朗特数, 其值在 1.0 左右。将控制方程(6.150)中的耗散项采用经验的代数关系来“模式化”, 例如

$$\epsilon = c_D \frac{K^{3/2}}{l} \quad (6.159)$$

式中, c_D 为经验系数, l 为具有量纲 $K^{3/2}/\epsilon$ 的湍流特征尺度。湍能方程最终写成可解形

式:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \epsilon \quad (6.160)$$

由此构成一方程模式,即只引入了一个关于 K 的偏微分方程。尽管一方程模式较之零方程模式有所改进,但由于湍流特征长度尺度的经验关系不易把握,从而导致其精度并不明显优于零方程模式。

若利用湍能耗散率方程(6.151)来确定耗散项 ϵ ,将其“模式化”为

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right] + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \left[\nu_t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (6.161)$$

式中, σ_ϵ , $c_{\epsilon 1}$ 和 $c_{\epsilon 2}$ 为经验系数,则 K 方程(6.160)加上 ϵ 方程(6.161)以及时均方程(6.141)就构成了一组封闭方程,可通过数值方法求解。由于引入了两个偏微分方程,该模式就称为 $K-\epsilon$ 两方程模式。目前, $K-\epsilon$ 两方程模式及其相应的修正形式已广泛地应用于各种工程实践中。

应用例

例1 利用应力张量求解应力矢量、法应力分量和切应力分量

设流体中的应力张量为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5x+7y^2-6x^2 & 6x^2 & 0 \\ -6x^2 & 9xy-4y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求点(3,2,1)处法向

为 $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ 的面元上的应力矢量 \mathbf{p}_n 及法应力分量 p_m 和切应力分量 p_u 。

解: 计算点(3,2,1)处应力张量为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 43 & -54 & 0 \\ -54 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 利用式(6.3), 即

$$\mathbf{p}_n = n_x \mathbf{p}_x + n_y \mathbf{p}_y + n_z \mathbf{p}_z = \frac{1}{2}(43\mathbf{i} - 54\mathbf{j}) + \frac{1}{2}(-54\mathbf{i} + 38\mathbf{j}) = -5.5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$$

而 $p_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k} \right) \cdot (-5.5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}) = -6.75$

$$p_u = \sqrt{|\mathbf{p}_n|^2 - p_m^2} = \sqrt{5.5^2 + 8^2 - 6.75^2} \approx 6.98$$

例 2 证明黏性引起的动能耗散率 $\varphi \geq 0$

证明: 由式(6.37)中动能耗散率 φ 的表达式

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\nu(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^2 \\ &= 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} S_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3}\nu(S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 \\ &= 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij}^2 - \frac{2}{3}\nu(S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 \\ &= 2\nu\{S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2) - \frac{1}{3}(S_{11} + S_{22} + S_{33})^2\} \\ &= 4\nu(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2) + \frac{2\nu}{3}\{(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2\} \\ &= \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{2\nu}{3} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

得证。

例 3 分析孤立涡丝在黏性流场中的扩散特性

解: 设在初始时刻无界不可压缩黏性流体中有一孤立直涡线, 涡管强度为 Γ , 建立柱坐标系, 使 z 轴与涡线重合, 则初始时刻的速度分布如下: $v_R|_{t=0} = 0, v_\varphi|_{t=0} = \frac{\Gamma}{2\pi R}, v_z|_{t=0} = 0$, 而在任意时刻 t , 有

$$v_R = 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad \Omega_R = 0, \quad \Omega_\varphi = 0, \quad \Omega_z = \Omega$$

此时

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial t} \mathbf{e}_z + v_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial\Omega}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z = \frac{\partial\Omega}{\partial t} \mathbf{e}_z \\ (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{V} &= \Omega \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

涡量方程简化为

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \Omega \quad (1)$$

这是抛物型方程。考虑到 $\partial/\partial\varphi = 0, \partial/\partial z = 0$, 有

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Omega}{\partial R} \right) \quad (2)$$

其定解条件为

$$\Omega|_{t=0, R>0} = 0 \text{ (初始条件)}, \quad \Omega|_{t>0, R \rightarrow \infty} = 0 \text{ (边界条件)} \quad (3)$$

方程②有解

$$\Omega = \frac{A}{\nu t} e^{-R^2/(4\nu t)} \quad (4)$$

式中, A 是待定常数。对半径为 R 的圆域 σ_R 利用斯托克斯公式, 得

$$\int_{\sigma_R} \Omega d\sigma = \oint_{L_R} v_\varphi dl = v_\varphi 2\pi R$$

$$\text{则} \quad v_\varphi = \frac{1}{2\pi R} \int_{\sigma_R} \Omega d\sigma = \frac{1}{2\pi R} \int_0^R \frac{A}{\nu t} e^{-R^2/(4\nu t)} 2\pi R dR = \frac{2A}{R} [1 - e^{-R^2/(4\nu t)}]$$

从而 $v_\varphi|_{t \rightarrow 0} = 2A/R$; 另一方面 $v_\varphi|_{t=0} = \Gamma/(2\pi R)$, 由此确定 $A = \Gamma/(4\pi)$ 。因此, 涡量分布为

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-R^2/(4\nu t)} \quad (5)$$

速度分布为

$$V = v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R} [1 - e^{-R^2/(4\nu t)}] \quad (6)$$

可以看出, 在 $t > 0$ 的任意时刻, 整个流场是有旋的, 且涡量随 R 增大而逐渐减小, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow 0$, 在任意距离 $R > 0$ 处随时间的推延, 涡量先是增大, 然后减小, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow 0$ 。图 6.4 给出了不同距离处的涡量随时间的变化。

例 4 哈根-泊肃叶流动问题

在无限长等截面直圆管中充满不可压缩黏性流体, 设流体的密度为 ρ , 黏度系数为 μ , 直管半径为 a , 在压强差的驱动下流体沿管轴方向做定常流动, 不计质量力, 求流体的速度分布。

解: 建立如图 6.20 所示的柱坐标系 (R, φ, z) , z 轴与管轴重合, 其正向与压强梯度方向相反, 由题意知:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad v_R = v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad F_R = F_\varphi = F_z = 0$$

因此, 定解方程组为

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (3)$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial v_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

$$v_z|_{R=a} = 0 \quad (5)$$

由方程①及 $\partial/\partial t = 0, \partial/\partial \varphi = 0$, 得

$$v_z = v_z(R) \quad (6)$$

由方程②和③及 $\partial/\partial t = 0$, 得

$$p = p(z) \quad (7)$$

将以上结果代入方程④, 得

$$\frac{\mu}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dv_z}{dR} \right) = \frac{dp}{dz} \quad (8)$$

上式左端仅是 R 的函数, 而右端仅是 z 的函数, 欲使等式成立, 两端必须等于同一常数, 记此常数为 k , 有

$$\frac{\mu}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dv_z}{dR} \right) = k \quad (9)$$

积分得

$$v_z = \frac{k}{4\mu} R^2 + C_1 \ln R + C_2 \quad (10)$$

式中, C_1, C_2 是积分常数, 考虑到在 $R = 0$ 处 v_z 为有限值, 应有 $C_1 = 0$; 再利用条件⑤, 有 $C_2 = -ka^2/4\mu$ 。最终速度分布为

$$v_z = -\frac{k}{4\mu} (a^2 - R^2) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (a^2 - R^2)$$

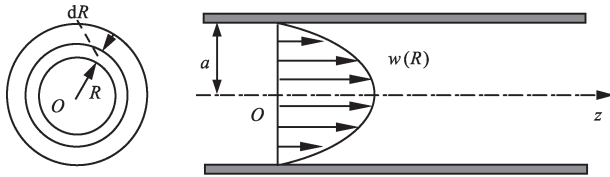


图 6.20 哈根-泊肃叶流动

这是哈根和泊肃叶各自独立研究得出的结果。根据此速度分布容易求得通过圆管截面的流量, 即

$$Q = \int_{\sigma_a} v_z d\sigma = -\frac{k}{4\mu} \int_0^a (a^2 - R^2) 2\pi R dR = \frac{\pi k}{8\mu} a^4 = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

进而求得圆管截面上的平均速度为

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{S} = \frac{a^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

例 5 利用量纲分析方法求解问题

利用量纲分析, 引入若干无量纲量, 减少原方程中变量数目, 从而使偏微分方程

变成常微分方程。下面以例3中直涡旋扩散方程②的求解为例,说明量纲分析在方程求解中的应用。

解:与平面无界流动中涡旋扩散有关的物理量是涡量 Ω ,涡管强度 Γ ,运动黏度系数 ν ,空间位置 r 和时刻 t ,它们之间的关系可写成

$$\Omega = f(\Gamma, \nu, r, t) \quad (1)$$

取 ν, t 为基本量,并引进无量纲量:

$$\Pi = \Omega t, \quad \Pi_1 = \frac{\Gamma}{\nu}, \quad \Pi_2 = \frac{r^2}{\nu t}$$

根据 Π 定理,有

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2) \quad \text{或} \quad \Omega t = \Phi\left(\frac{\Gamma}{\nu}, \frac{r^2}{\nu t}\right) \quad \text{或} \quad \Omega = \frac{1}{t} \Phi\left(\frac{\Gamma}{\nu}, \frac{r^2}{\nu t}\right) \quad (2)$$

再考虑 Ω 与 Γ 成正比,应有

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t} F\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)$$

令 $\eta = r^2/\nu t$,则有

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t} F(\eta) \quad (3)$$

上式带入例3中直涡旋扩散方程②,化简得常微分方程:

$$F(\eta) + 4F'(\eta) + \eta[F'(\eta) + 4F''(\eta)] = 0 \quad (4)$$

此方程的首次积分是

$$\eta[F(\eta) + 4F'(\eta)] = C_1$$

由于在涡线上涡量及其变化率均为有限值,因此,当 $\eta=0$ 时, $F(\eta), F'(\eta)$ 均有界,所以积分常数 $C_1=0$,于是有

$$F(\eta) + 4F'(\eta) = 0$$

再积分,得

$$F(\eta) = C_2 e^{-\frac{\eta}{4}} \quad \text{或} \quad \Omega = \frac{A}{\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

式中, A 是待定常数。

例6 圆锥黏度计原理

如图6.21所示,两共轴圆锥间充满待测不可压缩黏性流体。下锥面不动,上锥面在外力矩 M 的作用下以很小的角速度绕轴旋转,从而带动流体缓慢运动。若流体的自由面形状为球面 $r=a$,求力矩 M 与流体黏度系数 μ 的关系。

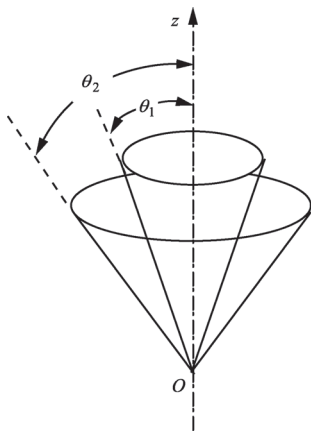


图6.21 圆锥黏度计

解:这是小雷诺数、定常、轴对称旋转流动。利用球坐标系并由题意知: $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ 。因而连续性方程中各项均等于零;不计质量力,斯托克斯方程 $\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V}$ 的分量式简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ 0 = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{v_\varphi}{\sin^2 \theta} \right) \end{cases} \quad (1)$$

边界条件是

$$v_\varphi |_{\theta=\theta_1} = r\omega \sin \theta_1, \quad v_\varphi |_{\theta=\theta_2} = 0 \quad (2)$$

$$p |_{r=a} = p_a \quad (3)$$

由方程组 (1) 的前两式及 $\partial/\partial \varphi = 0$ 和边界条件 (3) 知 $p \equiv p_a$ 。只需求 v_φ , 注意, 方程是线性的, 可利用分离变量法, 考虑到边界条件 (2), 令

$$v_\varphi = rf(\theta) \sin \theta \quad (4)$$

代入方程组 (1) 的第三式, 化简得关于 $f(\theta)$ 的常微分方程:

$$f'' \sin \theta + 3f' \cos \theta = 0 \quad (5)$$

相应的边界条件是

$$f |_{\theta=\theta_1} = \omega, \quad f |_{\theta=\theta_2} = 0 \quad (6)$$

显然 $f' = 0$ 适合方程 (5), 即 $f = \text{常数}$ 是一组解, 表明流动随圆锥面做刚性旋转, 这只有两锥面以相同角速度旋转才可能。现在设 $f' \neq 0$, 此时由方程 (5) 积分一次, 得

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{C}{\sin^3 \theta} \quad (7)$$

再积分, 得

$$f(\theta) = A + B \left(\text{Intg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \quad (8)$$

式中, A, B 是积分常数, 由边界条件 (6) 得

$$A = \frac{\omega \left(\text{Intg} \frac{\theta_2}{2} - \frac{\cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} \right)}{\ln[\text{tg}(\theta_2/2)/\text{tg}(\theta_1/2)] - \frac{\cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} + \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}} \quad (9)$$

$$B = \frac{\omega}{\ln[\text{tg}(\theta_2/2)/\text{tg}(\theta_1/2)] - \frac{\cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} + \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}}$$

因此, 流体的速度是

$$v_{\varphi} = Ar \sin\theta + Br \left(\sin\theta \ln t g \frac{\theta}{2} - \cot\theta \right) \quad (10)$$

外力作用于锥面上的力矩应等于流体作用在该锥面上的力矩,显然

$$M = \int_0^a \sin\theta_1 p_{\theta\varphi} |_{\theta=\theta_1} 2\pi r \sin\theta_1 dr$$

式中, $p_{\theta\varphi} |_{\theta=\theta_1} = \mu \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{v_{\varphi}}{r} \cot\theta \right)_{\theta=\theta_1} = \frac{2\mu B}{\sin^2\theta_1}$, 于是

$$M = 4\pi\mu B \int_0^a r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\mu B a^3 \quad (11)$$

这就是力矩 M 与黏度系数 μ 的关系, 由此可计算 μ 。

例7 根据边界层速度分布, 求边界层各种厚度和壁面应力在不可压缩定常流动的平壁面层流边界层中, 若速度分布为

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^2, \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

式中, U = 常数, a, b, c 是待定常数, 试确定 a, b, c 的值, 并求边界层厚度 δ 、壁面应力 τ_w 、排挤厚度 δ^* 和动量损失厚度 θ 。

解: (1) 利用边界条件求确定 a, b, c 值

$$\text{由 } u|_{y=0} = 0, \text{ 即 } u/U|_{\eta=0} = 0, \text{ 得 } a = 0 \quad (1)$$

$$\text{由 } u|_{y=\delta} = U, \text{ 即 } u/U|_{\eta=1} = 1, \text{ 得 } b + c = 1 \quad (2)$$

$$\text{又由 } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = \left. \frac{U}{\delta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{U} \right) \right|_{\eta=1} = 0, \text{ 得 } b + 2c = 0 \quad (3)$$

$$\text{解方程(2)和(3), 得 } b = 2, c = -1 \quad (4)$$

$$\text{于是, 速度分布为 } \frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2 \quad (5)$$

(2) 根据卡门动量积分方程(6.134), 有

$$\begin{aligned} \tau_w &= \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) d\eta \\ &= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \\ &= \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面, 有

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{U}{\delta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{U} \right) \right|_{\eta=0} = \frac{2\mu U}{\delta} \quad (7)$$

联立方程⑥和⑦,简单整理,得

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U} \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{15\nu x}{U} + C$$

式中, C 是积分常数,因 $x=0$ 处 $\delta=0$,故 $C=0$,从而有

$$\delta = \sqrt{30} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \approx 5.477 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{和} \quad \tau_w = \frac{2\mu U}{\delta} \approx 0.730 \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$$

根据定义式(6.119)和(6.120),有

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \delta \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \frac{1}{3}\delta \approx 1.826 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\theta = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \frac{2}{15}\delta \approx 0.730 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

例 8 利用混合长理论求平均流的速度分布

无界平板上方充满不可压缩黏性流体,流体在等压条件下沿板面方向做定常湍流运动。在板面附近厚度为 δ_c 的薄层,分子黏性起主要作用,雷诺应力可以忽略,这一层称为层流子层。在层流子层外部区域,雷诺应力起主要作用,分子黏性可以忽略,这一区域称为湍流核心区。已知板面上的切应力为 τ_w ,混合长度为 $l = ky$,试利用混合长理论求平均流的速度分布。

解:不可压缩黏性流体定常型湍流的雷诺方程沿 x 轴方向的分量为

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1)$$

根据题意, $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$ 。由布西内斯克假设:

$$-\rho \overline{u'u'} = 2A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad -\rho \overline{u'v'} = A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad -\rho \overline{u'w'} = A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) = 0$$

方程①简化为

$$\mu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \frac{dp'_{xy}}{dy} = 0 \quad (2)$$

积分得

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + p'_{xy} = C \quad (C \text{ 是积分常数}) \quad (3)$$

注意,壁面上有 $y=0$, $u' = v' = 0$, $\tau_w = \mu d\bar{u}/dy$,故 $C = \tau_w$ 。

先讨论在层流子层中的速度分布。

将 $p'_{xy} \approx 0$ 代入方程③,则有下列定解问题:

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_w, \quad \bar{u}_{y=0} = 0 \quad (4)$$

对应的解为时均速度的表达式,即

$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\mu} y$$

特别地,

$$\bar{u}_{y=\delta_c} = \frac{\tau_w \delta_c}{\mu} \quad (5)$$

再讨论在湍流核心区的速度分布。因 $\bar{u}_{y=\delta_c} = \tau_w \delta_c / \mu$, 方程 (3) 简化为

$$\rho'_{xy} = \tau_w \quad (6)$$

利用混合长理论,有

$$\rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_w \quad \text{或} \quad \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{l} \quad (7)$$

将 $l = ky$ 代入,并令 $\sqrt{\tau_w/\rho} = V_*$, 得

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{V_*}{k} \frac{1}{y} \quad (8)$$

积分并利用边界条件 (5), 得湍流核心区的速度分布为

$$\bar{u} = \frac{V_*}{k} \ln \frac{y}{\delta_c} + \frac{\tau_w \delta_c}{\mu}$$

实践题

1. 设应力张量场 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2x+4y^2 & -3x^2 & 0 \\ -3x^2 & 9xy-5y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 试分别求点 $A(4, 2, 1)$ 和 $B(3,$

$2, 1)$ 处法向为 $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ 的面元上的应力矢量 \mathbf{p}_n 及法应力分量 p_m 和切应力分量 p_m 。

2. 设某黏流的速度场为 $u=2y+3z, v=3z+x, w=2x+4y$, 该流体的黏度系数为 $\mu=0.008 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 。求流场中任一点处的切应力。

3. 已知黏性流体在圆管中做层流流动时的速度分布为 $v_z = c(r_0^2 - r^2)$, 其中 c 为常数, r_0 是圆管半径, 如图 6.22 所示。求: (1) 单位长度圆管对流体的阻力; (2) 在管内 $r=r_0/2$ 处沿管轴方向每单位长度流体的内摩擦力。

4. 已知不可压缩牛顿流体的速度场为 $u=y^2, v=w=0$ 。黏度系数 μ 为常数, 原点处 $p=p_0$, 质量力不计, 试求压强场和应力张量 \mathbf{P} 。

5. 两个无限大平行平板间充满不可压缩绝热黏性流体, 如图 6.23 所示, 下板固

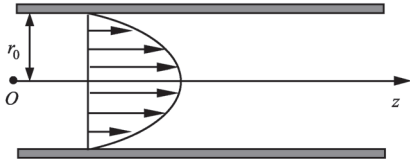


图 6.22 题 3 图

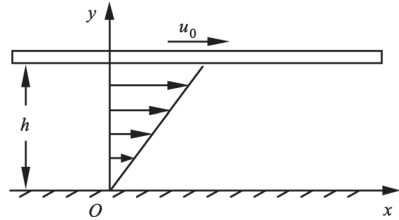


图 6.23 题 5 图

定不动,上板以速度 $u_0 = 15 \text{ cm/s}$ 在自身平面内运动,设黏度系数 $\mu = 0.01 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/cm}^2$,两板间距离 $h = 25 \text{ cm}$ 。求每单位体积流体的内能增加率。

6. 密度为 ρ 的液体在直径为 D 的圆管中做定常运动,在入口截面 1 处流速 v_1 为已知值,在截面 2 处的流速 v_2 与到管轴的距离 R 的关系是 $v_2 = v_{\max}(1 - 4R^2/D^2)$,两截面处压强分别为 p_1 和 p_2 ,质量力不计。试求两截面间流体作用在管壁上的摩擦力。

7. 证明:有势质量力作用下不可压缩黏性流体速度环量满足

$$d\Gamma/dt = -\nu \oint_L (\nabla \times \Omega) \cdot d\mathbf{l}$$

8. 不可压缩黏性流体在两无界平行平板间做定常直线层流运动。如图 6.24 所示,两板间距离 h ,下板固定,上板以常速 U 沿自身的平面运动。试求流体中的速度分布,讨论 $\partial p/\partial x = 0$, $\partial p/\partial x > 0$ 及 $\partial p/\partial x < 0$ 三种情况下的速度分布,画出相应的示意图。

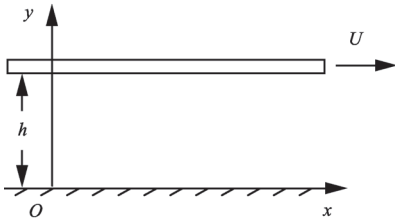


图 6.24 题 8 图

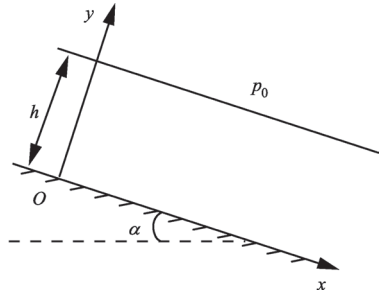


图 6.25 题 9 图

9. 如图 6.25 所示,密度为 ρ 、黏度系数为 μ 的不可压缩黏性流体在重力场中沿一倾角为 α 的无限大斜板做定常直线层流运动,流体层厚度 h 为常值,流体与空气接触处压强为常数,该处的黏性切应力为零。试求:(1) 流体内的速度场和压强场;(2) 流体对斜板的摩擦应力。

10. 黏度系数为 μ 的不可压缩流体仅在压强差的作用下沿半径为 a 的无限长圆管做定常轴对称流动,管内有一半径为 b ($b < a$) 的无限长实心圆柱体,如图 6.26 所示。求流体中的速度分布及内外壁面上受到的切应力。

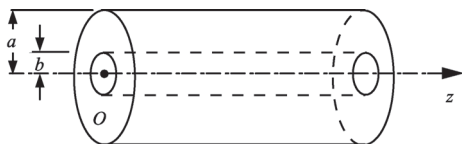


图 6.26 题 10 图

11. 斯托克斯的第二问题。一块无限大平板的上半空间充满静止不可压缩黏性流体,从某时刻开始平板沿自身平面做 $u = U \cos \omega t$ 的简谐振动,因而引起流体的非定常运动。设流体的运动黏度系数为 ν ,质量力不计,求流体中的速度分布。

12. 在来流速度是 U_∞ 且具有重力作用的常黏性不可压缩无限流场中,存在一个线尺度为 L 的物体,该物体做周期为 T 的振动。试导出支配流体运动的无量纲方程,并求进行模拟实验时的相似判据。

13. 转轴在涂油的轴承中转动,设切向阻力 R 与轴的转动角速度、负重 P 、轴的直径 D 以及润滑剂的黏度系数 μ 有关,试利用 Π 定理找出相应的无量纲量之间的关系式。

14. 小水滴在空气中下落时,随着速度增大所受到的黏滞阻力也增大,当速度达到一定值时,作用于水滴的浮力、阻力和重力相平衡,水滴匀速下落。设空气密度为 ρ ,黏度系数为 μ ,水滴密度为 ρ_0 ,半径为 a ,重力加速度为 g ,求水滴匀速下落时的速度。

15. 在平板黏度计中,待测黏度系数的不可压缩黏性流体包含在两个圆盘间的柱状区域内,如图 6.27 所示,一个圆盘固定在 $z = 0$ 的平面上;另一个圆盘固定在 $z = h$ 的平面上,并在外加力矩 M 作用下以很小的匀角速度 ω 绕轴旋转。不计重力,试证明流体的黏度系数 μ 可由公式 $\mu = 2hM/(\pi\omega a^4)$ 计算。

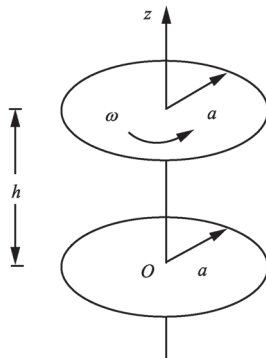


图 6.27 题 15 图

16. 设不可压缩定常流动的平壁面层流边界层中,速度分布可表示为

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3, \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

其中 $U = \text{常数}$, a, b, c, d 为待定常数。试求:(1) a, b, c, d 的值,确定边界层内的速度分布;(2) 由雷诺数 $Re_x = Ux/\nu$ 表示的边界层厚度、壁面应力 τ_w 、排挤厚度 δ^* 和动量损失厚度 θ 。

17. 若在不可压缩定常流动的平壁面层流边界层中,速度分布为

$$\frac{u}{U} = \sin \frac{\pi\eta}{2}, \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

其中 $U = \text{常数}$, 试求边界层厚度 δ 、壁面应力 τ_w 、排挤厚度 δ^* 和动量损失厚度 θ 。

18. 证明在二维湍流流动中, 由于分子黏性引起的脉动动能转化为热能的动能耗散率是

$$D_f = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2} + 2 \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial y} \right]$$

19. 相距为 $2h$ 的两平行平板间充满不可压缩黏性流体, 流体在常压强梯度作用下沿板面方向做定常湍流流动。由于对称性, 只研究从下板到 $y=h$ 的区域内的流动, 试利用卡门湍流相似理论, 求该区域湍流核心区内时均速度的分布。设板面上切应力为 τ_w , $y=h$ 处切应力为零, 时均速度具有最大值 \bar{u}_{\max} , 当 $y \rightarrow 0$ 时, $d\bar{u}/dy \rightarrow \infty$ 。

本章小结

黏性流体存在着两种完全不同的流动状态——层流和湍流。前者是一种层次分明、互不干扰的流动, 后者是一种无规则的、随机的不定常流动, 具体的流动属于哪一种状态, 由雷诺数 Re 决定。本章讨论的是这两种流动的运动规律。

1. 基本概念

(1) 应力矢量 \mathbf{p}_n 和应力张量 \mathbf{P} : 黏性流体的应力矢量 \mathbf{p}_n 不仅决定于作用点的位置, 而且还与作用面元的取向有关, 它是位置矢量、面元法向 \mathbf{n} 和时间的函数。因此, 流体中某一点的应力状态必须由一种新的物理量——应力张量 \mathbf{P} 来描述。两者关系为 $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ 。

(2) 本构关系: 应力张量 \mathbf{P} 与形变率张量 \mathbf{S} 之间的关系成为本构关系, 即

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + (-p + \lambda\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{I}$$

遵从这一规律的流体叫作牛顿流体, 否则叫作非牛顿流体。本构关系是构成黏性流体运动完备方程组的基础, 亦是 N-S 方程成立的充要条件。

(3) 注意区别 $\nu\nabla^2 u$ 和 $\mu du/dy$: $\nu\nabla^2 u$ 为单位质量流体所受到的黏性力; $\mu du/dy$ 为单位面积流体所受到的黏性力, 又叫切向应力。

(4) 无滑移条件: $\mathbf{V}_{\text{流}} = \mathbf{V}_{\text{固壁}}$, 它包括了 $V_{1n} = V_{2n}$ (法向) 和 $V_{1t} = V_{2t}$ (切向)。注意区别理想流体中的滑移条件。

(5) 黏性流动基本特性: 流动有旋性、涡旋扩散性和能量耗散性是黏性流动的基本特性。

(6) 边界层概念与特征: 普朗特将大雷诺数下的流场分为两个区域, 一个是紧贴壁面非常薄的区域, 称为边界层; 另一个是边界层以外的区域, 称为外流区域。边界层的三个主要特征为: ①几何学特征, 边界层很薄, 即 $\delta/L \ll 1$; ②运动学特征, 边界

层内速度切变很大,流动强烈有旋,即 $\partial u/\partial y \gg 1$;③ 动力学特征,边界层内黏性效应明显,黏性力与迁移惯性力同量级,即 $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \sim \nu \nabla^2 \mathbf{V}$ 。

(7) 边界层厚度:① 几何厚度 δ ,定义为 $u/U_e = 99\%$ 时对应的距壁面的垂直距离,量级估算式为 $\delta/l \sim 1/\sqrt{Re}$;② 位移厚度 $\delta^* = \int_0^\infty (1-u/U) dy$;③ 动量损失厚度 $\theta = \int_0^\infty (u/U)(1-u/U) dy$ 。

(8) 湍流基本特性:① 随机性,湍流瞬时流场的物理量是空间和时间的随机函数;② 湍流动量和能量的输运性,湍流脉动是含有大量分子的流体微团的无规则运动,表现为宏观的无规则运动,从而在流体中引起动量和能量的输运;③ 涡旋性,湍流中存在大大小小的涡旋,是引起流速随时间不规则变化及产生流速脉动的根本原因。

(9) 雷诺实验: $Re < Re^*$, 流动处于稳定层流状态; $Re^* < Re < Re^*$, 流动处于过渡状态; $Re > Re^*$, 流动处于不稳定状态。 Re^* 和 Re^* 分别称为上临界雷诺数和下临界雷诺数。

(9) 雷诺应力: $-\rho \overline{u_i u_j}$ 的物理实质是湍流脉动引起单位面积上的动量输运率。

2. 基本理论

(1) 黏性流体完备方程组

黏性流体基本方程为

$$\text{连续性方程} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\text{动量方程} \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\text{能量方程} \quad \frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) + q$$

上述方程适用于一般流体,但由于应力张量 \mathbf{P} 有六个独立分量,方程组不完备。将本构关系引入动量方程,得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

这就是著名的 N-S 方程。对于不可压缩流体,当已知质量力 \mathbf{F} 、密度 ρ 和黏性系数 ν ,连续性方程与 N-S 方程构成完备方程组,可决定四个未知数 u, v, w, p 。

(2) 小雷诺数流动近似解

小雷诺数流动是指速度缓慢、流动尺度小以及黏性大的一类流动。雷诺数 $Re \ll 1$ 反映了黏性力项 $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ 远大于迁移惯性力项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$,故可以将 N-S 方程中非线性项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 完全略去,得到线性的动量方程,可求其近似解。

(3) 大雷诺数流动——边界层理论

大雷诺数流动是指速度快、流动尺度大以及黏性小的一类流动。雷诺数 $Re \gg 1$ 反映了黏性力项 $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ 比迁移惯性力项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 要小得多。若简单地略去黏性力项,则黏性流体 N-S 方程将变为理想流体欧拉方程,后者的解不满足前者的边界条件,将导致诸如达朗贝佯谬等问题。为解决这一难题,普朗特建立了边界层理论。边界层方程主要包括普朗特边界层微分方程和卡门动量积分方程。前者主要特点:在边界层内压强沿 y 方向保持不变,沿 x 方向的变化由外部势流决定;保留了非线性项,但 x 的二阶偏导数项消失,相关数值计算更容易。后者主要特点:不会出现非线性项,只要知道边界层动量厚度,就可以求壁面切应力分布,利于工程应用。

(4) 相似理论与量纲分析

对于流体力学的研究除了采用理论方法和数值计算之外,还有重要的实验方法。要使模型实验的结果有意义,就必须使模型流场与原型流场相似,从而使两种流动的物理本质相同。

根据不同的流动特征,描述系统流动现象的特征量可以组成一系列无量纲数,称为相似准则数,它们是两系统流动现象相似的判据。通过无量纲化方程:

$$Sr \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_1^*} + u_3^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_3^*} = \frac{1}{Fr} g_i^* - Eu \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_3^{*2}} \right)$$

可以获得两流体系统的相似准则数,它们是

$$Sr = \frac{L}{UT} = \frac{\text{特征局地惯性力}}{\text{特征迁移惯性力}}, \quad Fr = \frac{U^2}{gL} = \frac{\text{特征迁移惯性力}}{\text{特征重力}},$$

$$Eu = \frac{p_\infty}{\rho U^2} = \frac{\text{特征气压梯度力}}{\text{特征迁移惯性力}}, \quad Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{特征迁移惯性力}}{\text{特征黏性力}}.$$

当物理方程(规律)未知时,不能用上述方程分析法求相似判据,可用量纲分析法。量纲分析法的出发点是量纲齐次性原理,量纲分析的基本定理是 Π 定理。利用 Π 定理求物理关系的步骤是:①列出所有相关的有量纲的物理量;②选取基本量,但必须保持量纲的独立性;③组成无量纲量;④写出无量纲量的关系式。

(5) 湍流理论

根据湍流的随机特性,统计方法是湍流问题研究的重要理论方法,即采用求平均值的方法来研究物理量场的变化规律。为此,湍流的基本方程由两部分组成:时均流方程和脉动流方程,两部分均包括连续性方程、动量方程和能量方程。

时均动量方程又称雷诺方程。由于雷诺应力张量有六个独立分量,加上时均速度分量和时均压力,共十个未知函数,而雷诺方程和时均连续性方程合起来为四个,必须建立雷诺应力和时均速度场之间的关系,才能构成时均流的完备方程组。所谓湍流模式就是雷诺应力和时均速度场之间的某种关系,它分为零方程模式、一方程模

式及二方程模式等。

3. 基本方法

对于流动方向相互平行,速度梯度与速度垂直,N-S方程中的非线性项自动消失时,可以求得平行平板或同心圆管间的层流流动问题的精确解。两种类型的精确解是有压力梯度的泊肃叶流和无压力梯度的库埃特流。

精确解题的一般步骤是:①分析流动特征;②选取合适的坐标系,列出封闭方程组并根据流动特征进行简化,确定边界条件,不定常问题还应有相应的初始条件;③将偏微分方程化为常微分方程并求其通解;④由边界条件和初始条件决定积分常数,并对结果进行讨论。

实践题参考答案

第 1 章

1. $10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-2}, 10, 10^4; 10^{-12}, 10^{-10}, 10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-1}$; 前者不能, 后者可以。

2. $1.25 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, 10^{-2} \text{ N}/\text{m}^2, -10^{-2} \text{ N}/\text{m}^2$ 。

3. $0, \pi\mu U/(2\delta)$ 。

4. $0.7132 \text{ N}/\text{m}^2$ 。

5. $\mu \approx 0.9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。

第 2 章

1. $(a, b, c); (1, 1, 1), (e^{-1}, e, 1); (u, v, w) = (0, 0, 0), (a_x, a_y, a_z) = (0, 0, 0); (u, v, w) = (e^t, -e^{-t}, 0), (a_x, a_y, a_z) = (e^t, e^{-t}, 0)$ 。

2. $\mathbf{V} = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j}, \mathbf{a} = 108\mathbf{i} + 72\mathbf{j}$ 。

3. $\mathbf{a} = 15\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ 。

4. $-100/6 \text{ Pa}/\text{h}$ 。

5. $(u, v, w) = (xt, y/(t+1), 0)$ 。

6. $u = (a+1)e^t - 1, v = (b+1)e^t - 1, w = 0$ 。

7. $y = Cx$, 从原点出发($k > 0$) 或会聚于原点($k < 0$) 的射线族; $xy = C$, 焦点在直线 $y = \pm x$ 上、以 x 轴和 y 轴为渐近线的等双曲线族; $x^2 + y^2 = C$, 以原点为中心的一族同心圆; $r = Ce^{t/a}$, 螺旋线族。

8. $r = C_1 \sin\theta$ 或 $x^2 + (y - C)^2 = C^2$, 中心在 y 轴上且过原点的圆族。

9. $x = y - y^2/2 - 1/2; \begin{cases} x = \frac{3}{2}t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$ 。

10. 速度场(1)、(4) 和(5) 满足。

11. $v = -2axy$ 。

12. $w = 3z$ 。

13. (1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} = 0$; (2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r v^2)}{\partial r} = 0$; (3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$; (4) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} = 0$; (5) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$; (6) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ 。

14. (1) 3.18 m/s, 12.74 m/s, 1.42 m/s; (2) 3.18 m/s, 21.23 m/s, 1.18 m/s。

15. (1) 0, $-ak$, 0, 0, $a/2$, 不可压缩, 有旋; (2) 0, $2ak$, 0, 0, 0, 不可压缩, 有旋; (3) 0, 0, $(2axy)/(x^2 + y^2)^2$, $-(2axy)/(x^2 + y^2)^2$, $a(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$, 不可压缩, 无旋。

16. (1) $\text{div} \mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = a(xi - yj)$, 不可压缩, 有旋; (2) $\text{div} \mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = -xti + ytj$, 不可压缩, 有旋; (3) $\text{div} \mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = 0$, 不可压缩, 无旋; (4) $\text{div} \mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = 0$, 不可压缩, 无旋。

17. $\phi = ax(x^2 - 3y^2)$, $\Gamma = 2a$ 。

18. 提示: 利用场论公式 $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$, 取 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{V}$ 。

19. $u = ax, v = -ay; xy = C$, 焦点在直线 $y = \pm x$ 上, 以 x 轴和 y 轴为渐近线的等轴双曲线。

20. $\phi = axy, Q = 2a$ 。

21. $\phi = axy, \psi = a(y^2 - x^2)/2, W = -iaz^2/2$ 。

22. $\phi = -a \sin \theta / r^2 = -(2axy)/(x^2 + y^2)^2, W = a/z^2$ 。

23. (1) $u = (ax + by)/(x^2 + y^2), v = (bx - ay)/(x^2 + y^2)$ 或 $v_r = a/r, v_\theta = -b/r$; (2) $\phi = a \ln r - b\theta, \psi = a\theta + b \ln r$, 等势线 $r = C_1 e^{b\theta/a}$, 流线 $r = C_2 e^{-a\theta/b}$, 均为螺旋线; (3) $\Gamma + i\theta = -2\pi b + i2\pi a$ 。

24. 九个基本势流的叠加, 分别是: $z = \pm i$ 处强度 2π 和 $z = \pm 2i$ 处强度 4π 的点源, 与 $z = \pm i$ 处强度 -2π 和 $z = \pm 2i$ 处强度 6π 的点涡, 以及 $z = 0$ 处偶极矩为 -2π 的偶极子; $8\pi; 12\pi$ 。

第 3 章

1. $-(p_0 - \rho g z)\mathbf{i}, -(p_0 - \rho g c/2)bci; (p_0 - \rho g z)\mathbf{i}, (p_0 - \rho g c/2)bci; (p_0 - \rho g z)\mathbf{j}, (p_0 - \rho g c/2)acj; -(p_0 - \rho g z)\mathbf{j}, -(p_0 - \rho g c/2)acj; -(p_0 - \rho g z)\mathbf{k}, -(p_0 - \rho g c/2)abk; p_0 \mathbf{k}, p_0 abk, \rho abcgk$ 。

2. $136\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 890\mathbf{k}$ (Pa)。
3. $-0.108\mathbf{i} + 0.029\mathbf{j} - 10.015\mathbf{k}$ (m/s²)。
4. 提示:利用场论公式 $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - \phi\nabla^2\phi$ 。
5. $v_r = b^2 b'/r^2, p = p_\infty - \rho b^4 b'^2/(2r^4) + \rho(2bb'^2 + b^2 b'')/r, p_b = p_\infty + \rho(3b'^2 + 2bb'')/2$ 。
6. (1) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, p = k\rho (k = RT)$;
- (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(2u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。
7. (1) $(x - Ut)^2 + (y - Vt)^2 + (z - Wt)^2 = a^2$;
- (2) $(x - Ut)(u - U) + (y - Vt)(v - V) + (z - Wt)(w - W) = 0$ 。
8. $\xi = \xi_0 \cos\omega t, p = p_0 + \rho\omega^2 \xi_0 (x - l/2) \cos\omega t$, 其中 $\omega^2 = 2p_0/(\rho la)$ 。
9. $\xi = \xi_0 \cos\omega t$, 其中 $\omega^2 = g(\sin\alpha + \sin\beta)/l$ 。
10. (1) 2.42 m/s; (2) 2.42 m/s; (3) 2.57 m/s。
11. 小孔应开在距桶底 $H/2$ 高度处。
12. 提示:利用拉格朗日积分。
13. 提示:利用积分形式连续性方程和伯努利方程。
14. $V = \sqrt{2gh} \operatorname{th}[\sqrt{2gh}t/(2L)]$ 。
15. $h = Q^2/(2gS_B^2) \approx 46$ cm。
16. $z_B = (h/2) \cos[(2g/l)^{1/2}t]$ 。
17. $(5/3)\rho U^2$ 。
18. 提示:采用极坐标形式的边界条件。
19. $\rho A(V_1 - U)^2(1 - \cos\theta)$ 。
20. $\rho A V^2 \sin\alpha, e = (a/2) \cot\alpha, a_1 = a(1 + \cos\alpha)/2, a_2 = a(1 - \cos\alpha)/2$ 。
21. $\rho A(V_0 - at)^2 - \rho Aa$ 。
22. $R = (p_0 + \rho gb/2)ab, x_R = a/2, y_R = b/2 + \rho gb^2/[12(p_0 + \rho gb/2)]$ 。
23. $p_0 = 4\pi G\rho_0^2(a^2/6 - 2\beta a^4/15 + \beta^2 a^4/30)$ 。
24. (1) 3.75 m; (2) $M_W = 6547.5$ m · T, $M_R = 135$ m · T, 因为 $M_W \gg M_R$, 所以坝是稳固的。

第 4 章

1. (1) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (s⁻¹), $y - x = \text{const}, y - z = \text{const}$; (2) 10^{-2} m² · s⁻¹; (3) $\sqrt{3} \times 10^{-2}$ m² · s⁻¹。

2. $-kab$ 。
3. $-\pi/2$ 。
4. -6π 。
5. (1) $2k\pi$; (2) 0 。
6. 提示:利用斯托克斯公式及涡管强度定义。
7. 提示:利用斯托克斯公式及涡管强度定义。
8. (1) $\Omega = (\Gamma_0/4\pi\nu t)e^{-r^2/(4\nu t)}$; (2) $\Gamma = \Gamma_0[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}]$; (3) 略。
9. $4\pi\beta a^2$ 。
10. 有旋;无旋。
11. 提示:利用涡量方程(4.21)化简。
12. 提示:利用皮叶克尼斯定理。
13. 提示:利用皮叶克尼斯定理。
14. 7.56 m/s 。
15. $\Gamma(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)/(4\pi a)\mathbf{e}_\theta$; $\Gamma/(4\pi a)\mathbf{e}_\theta$; $\Gamma/(4\pi a)\mathbf{e}_\theta$ 。
16. $\Gamma a^3/[2(a^2 + z^2)^{3/2}]\mathbf{k}$ 。
17. $v_r = 0, v_\theta = \omega r (r \leq a), v_\theta = \omega a^2/r (r > a); p = p_\infty - \rho\omega^2 a^2 [1 - r^2/(2a^2)] (r \leq a)$ 。
18. (1) 两点涡以相同的速度沿垂直于其连线的方向平行移动; (2) 两点涡绕其速度连线延长线上强度较大的点涡一侧的“惯性中心 C ”旋转, 惯性中心 C 距点涡(强度较大者)距离为 $a = \Gamma_1 l / (\Gamma_2 - \Gamma_1)$; (3) 惯性中心 C 在两点涡连线中点 $a = l/2$; (4) 惯性中心 C 在两点涡之间, 靠近强度较大者的距离为 $a = \Gamma_1 l / (\Gamma_2 + \Gamma_1)$ 。

第 5 章

1. $15.04 \text{ m/s}; 9.64 \text{ s}$ 。
2. $64.1 \text{ m}; 6.41 \text{ s}$ 。
3. (1) $\zeta = \frac{C\sigma}{g} \text{chkh} \sin\sigma t \cos kx, a = \frac{C\sigma}{g} \text{chkh}$;
- (2) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2k}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); (3) \sigma^2 = kg \text{chkh}$;
- (4) $u = -Ck \text{chkh} \cos\sigma t \sin kx, w = -Ck \text{shkh} \cos\sigma t \cos kx,$
 $\text{shkh} \sin kx = \text{const}, x = x_0 - \frac{Ck}{\sigma} \text{chkh} \sin\sigma t \sin kx_0,$
 $z = z_0 - \frac{Ck}{\sigma} \text{shkh} \sin\sigma t \cos kx_0$ 或 $\frac{z - z_0}{x - x_0} = -\text{thkh} \cot kx_0$;

$$(5) p = p_0 - \rho g z + \frac{\text{ch}k(z+h)Ck}{\text{ch}k(z+h)\sigma} \sin\sigma t \cos kx。$$

4. (1) $\zeta = -\frac{C\sigma}{g} \sin(kx - \sigma t)$, $a = \frac{C\sigma}{g}$; (2) $x = \frac{\sigma}{k}t + \frac{n\pi}{k}$, $x = \frac{\sigma}{k}t + (2n+1)\frac{\pi}{2k}$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $U = \sigma/k$; (3) $\lambda = 2\pi/k$, $T = 2\pi/\sigma$; (4) $\sigma^2 = kg$, $\lambda = gT^2/(2\pi)$; (5) $u = -a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$, $w = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$, $e^{kz} \sin(kx - \sigma t) = \text{const}$, $x = x_0 - ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t)$, $z = z_0 - ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t)$ 或 $(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0}$; (6) $p = p_0 - \rho g z - \rho a g e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$ 。

$$5. \phi = \frac{a\sigma}{g} e^{kz} \sin(kx - \sigma t)。$$

6. 自由面波幅为 $a = [H/(2\rho g)]e^{kd} = [H/(2\rho g)]e^{\sigma^2 d/g}$, 圆频率为 σ 。

7. 略。

8. 有限不可压缩重力流体中的驻波, h 为流体深度, m 为波数, q 为圆频率, B 为与波幅有关的常数, $a = (Bq/g)\text{ch}mh$ 。

9. (1) 0.943 m/s; (2) 3.14159 m, 5.5 个; (3) 0.472 m/s。

10. 略。

11. 略。

$$12. U = \sqrt{Sg/b}。$$

13. 128 cm/s。

14. 略。

15. 略。

16. 略。

17. 略。

第 6 章

1. $-14.67j$, $-4.89, 13.83$; $(17i - 20j)/3, 1.56, 8.61$ 。

2. $0.024 \text{ N/m}^2, 0.04 \text{ N/m}^2, 0.056 \text{ N/m}^2$ 。

3. (1) $R|_{r=r_0} = -4\pi\mu cr_0^2$; (2) $R|_{r=r_0/2} = -\pi\mu cr_0^2$ 。

$$4. p = p_0 + 2\mu x; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2\mu x - p_0 & 2\mu y & 0 \\ 2\mu y & -2\mu x - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu x - p_0 \end{bmatrix}。$$

5. $d(\rho e)/dt = (9/25) \times 10^{-9} \text{ J}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$ 。

6. $0.25\pi D^2(p_1 - p_2 - \rho v_1^2/3)$ 。

7. 提示:利用场论公式 $\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ 。

8. $\frac{u}{U} = \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu U} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$; 当 $\partial p/\partial x = 0$ 时, $u = (U/h)y$; 当 $\partial p/\partial x > 0$ 时, 速度分布廓线开口朝向 x 轴正向; 当 $\partial p/\partial x < 0$ 时, 速度分布廓线开口朝向 x 轴负向。

9. (1) $u = -(\rho g \sin\alpha/\mu)(y^2/2 - hy)$, $p = p_0 + \rho g(h - y)\cos\alpha$; (2) $p_{yx}|_{y=0} = \rho gh \sin\alpha$ 。

10. $v_z = (K/4\mu)[R^2 - (a^2 - b^2)\ln R/\ln(a/b) + (a^2 \ln b - b^2 \ln a)/\ln(a/b)]$;

$p_{Rz}|_{R=b} = \frac{K}{4} \left[2b - \frac{a^2 - b^2}{b \ln(a/b)} \right]$, $p_{Rz}|_{R=a} = \frac{K}{4} \left[2a - \frac{a^2 - b^2}{a \ln(a/b)} \right]$, 其中 $K = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{常数}$ 。

11. $u = U e^{-\sqrt{\omega y/(2\nu)}} \cos[\omega t - \sqrt{\omega y/(2\nu)}]$ 。

12. $Sr = L/(U_\infty T)$, $Fr = U_\infty^2/(gL)$, $Eu = p_\infty/(\rho U_\infty^2)$, $Re = U_\infty L/\nu$ 。

13. $R/P = \Phi(\mu\omega D^2/P)$ 。

14. $U = 2ga^2(\rho_1 - \rho)/(9\mu)$ 。

15. 提示:小 Re 数问题,采用柱坐标形式动量方程和边界条件求速度分布。

16. $\delta \approx 4.641x/\sqrt{Re_x}$, $\tau_w \approx 0.323\rho U^2/\sqrt{Re_x}$, $\delta^* \approx 1.740x/\sqrt{Re_x}$, $\theta \approx 0.646x/\sqrt{Re_x}$ 。

17. $\delta \approx 4.795x/\sqrt{Re_x}$, $\tau_w \approx 0.328\rho U^2/\sqrt{Re_x}$, $\delta^* \approx 1.743x/\sqrt{Re_x}$, $\theta \approx 0.655x/\sqrt{Re_x}$ 。

18. 略。

19. $\bar{u} = \frac{V^*}{\kappa} [\sqrt{1 - y/h} + \ln(1 - \sqrt{1 - y/h})] + \bar{u}_{\max}$, 其中 $V^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, κ 为卡门常数。

参考文献

- 丁祖荣,2003. 流体力学[M]. 北京:高等教育出版社.
- 林建忠,2005. 流体力学[M]. 北京:清华大学出版社.
- 毛根海,邵卫云,张燕,2006. 应用流体力学[M]. 北京:高等教育出版社.
- 欧特尔 H, 2006. 普朗特流体力学基础[M]. 朱自强,钱翼稷,李宗瑞,译. 北京:清华大学出版社.
- 潘文全,1980. 流体力学基础[M]. 北京:机械工业出版社.
- 童秉纲,尹协远,朱克勤,1994. 涡运动理论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社.
- 吴介之,马晖扬,周明德,1993. 涡动力学引论[M]. 北京:高等教育出版社.
- 吴望一,1983. 流体力学[M]. 北京:北京大学出版社.
- 易家训,1982. 流体力学[M]. 章克本,张涤明,陈启强,等,译. 北京:高等教育出版社.
- 余志豪,苗曼倩,杨平章,等,2004. 流体力学(第3版)[M]. 北京:气象出版社.
- 章梓雄,董曾南,1999. 黏性流体力学(第2版)[M]. 北京:清华大学出版社.
- 周光炯,严宗毅,许世雄,等,2000. 流体力学(第2版)[M]. 北京:高等教育出版社.
- 庄礼贤,尹协远,马晖扬,2009. 流体力学(第2版)[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社.

附录 A 矢量分析概述

A1 标量场和矢量场及其几何描述

(1) 标量场和矢量场

某种物理量在空间或一部分空间的分布,叫作该物理量场。例如,气压、温度和速度在空间的分布,分别称为气压场、温度场和速度场。

如果形成场的物理量是标量,则称该物理量场为标量场;如果形成场的物理量是矢量,则称该物理量场为矢量场。例如,气压场和温度场就是标量场,而速度场则是矢量场。

在直角坐标系中,物理量场常表示为位置坐标 (x, y, z) 和时刻 t 的函数,称为场函数,一般表示为

$$f = f(x, y, z, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A. 1})$$

式中, \mathbf{r} 是场中任一点 $M(x, y, z)$ 对坐标原点的矢径。

如果某物理量 f 在场中的分布不随时刻而变,即在场中各点处 $\partial f/\partial t=0$,则称该物理量场为定常场或稳定场,此时场函数表示为 $f=f(\mathbf{r})$ 。

(2) 标量场和矢量场的几何描述

设有标量场 $\phi = \phi(x, y, z, t)$,为了讨论它在指定时刻 t 的空间分布情况,在场中将物理量 ϕ 相等的各点连成曲面,即

$$\phi(x, y, z, t) = C \quad (\text{A. 2})$$

这些曲面叫作指定时刻该标量场的等值面。例如,气压场中的等压面、温度场中的等温面和电场中的等势面,都是相应标量场的等值面。

为了直观地反映某一时刻 t 矢量场 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z, t)$ 在空间的分布情况,在场中绘制一系列曲线,使曲线上每一点处的切线方向恰与这点处矢量 \mathbf{a} 的方向重合,这样的曲线叫作矢量场 \mathbf{a} 的矢量线。例如,流场中的流线和电场中的电力线,就分别是速度场和电场强度的矢量线。

如图 A.1 所示, $M(x, y, z, t)$ 为矢量线上的任一点,在指定时刻 t ,该点处的矢量可表示为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

令 $\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$ 表示矢量线上的两点 M' 和 M 矢径之差,当 $M' \rightarrow M$ 时,它

表示为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

其方向沿 M 点处矢量线的切线方向。根据矢量线定义 $\mathbf{a} \parallel d\mathbf{r}$, 从而

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{r} = 0$$

$$\text{或 } \frac{dx}{a_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z,t)} \quad (\text{A. 3})$$

这就是矢量线应满足的微分方程组, 其中 t 是参数, 积分时可看作常数。

由矢量线所组成的曲面, 叫作矢量面, 如果矢量面是一管状曲面, 则称它为矢量管。

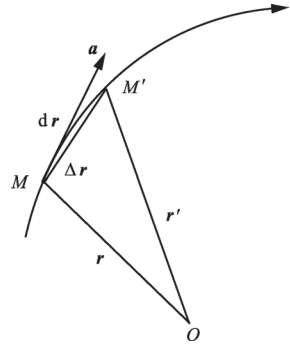


图 A.1 矢量线

A2 梯度、散度和旋度

(1) 标量场梯度和方向导数

标量场 $\phi(x, y, z, t)$ 在指定时刻 t 在点 $M(x, y, z)$ 处的梯度是一个矢量, 它的方向沿该处 ϕ 的等值面的法线方向并指向 ϕ 增加的一侧, 它的大小等于 ϕ 沿该方向的增加率, 记作 $\text{grad}\phi$, 即

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n} \quad (\text{A. 4})$$

在直角坐标系 xyz 中, 梯度 $\text{grad}\phi$ 的解析表达式为

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (\text{A. 5a})$$

若引入矢量微分算符 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, 则式(A. 5a) 又可写成

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi \quad (\text{A. 5b})$$

标量场的梯度, 描述了该标量场在指定时刻在给定点处的分布状态。如果在场中各点处 $\text{grad}\phi = 0$, 即 $\partial\phi/\partial x = 0, \partial\phi/\partial y = 0, \partial\phi/\partial z = 0$, 则称该标量场为均匀场, 此时 $\phi = \phi(t)$ 。

在指定时刻 t , 标量场 $\phi(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿某方向 \mathbf{l} 的方向导数 $\partial\phi/\partial l$, 描述了 ϕ 在该点处沿该方向的分布状态, 它等于梯度在此方向的投影, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = (\text{grad}\phi)_l = \mathbf{l} \cdot \nabla\phi = (\mathbf{l} \cdot \nabla)\phi \quad (\text{A. 6})$$

在指定时刻 t , 标量场 ϕ 对空间的全微分可表示为

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\mathbf{r} \cdot \nabla\phi \quad (\text{A. 7})$$

(2) 矢量场散度

矢量场 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 在指定时刻 t 在点 $M(x, y, z)$ 处的散度是一个标量, 它等于矢量场 \mathbf{a} 通过包围该点的封闭曲面 σ 的通量与 σ 所围体积 τ 之比在 $\tau \rightarrow 0$ 时的极限, 即等于矢量场 \mathbf{a} 通过该点处的单位体积封闭曲面的通量, 记作

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} a_n d\sigma}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\tau} \quad (\text{A. 8})$$

矢量场的散度, 描述了指定时刻给定点处由矢量场随空间的分布所决定的辐射程度。如果在场中各点处 $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, 则称矢量场为无散场。

在直角坐标系 xyz 中, 矢量场的散度可表示为

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A. 9a})$$

利用矢量微分算符 ∇ , 有

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A. 9b})$$

(3) 拉普拉斯量

标量场 $\phi(x, y, z, t)$ 的梯度 $\operatorname{grad} \phi$ 是一个矢量场, 可以对它施行求散度的运算, 因为

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

利用式(A. 9a), 得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A. 10a})$$

或

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \equiv \Delta \phi \quad (\text{A. 10b})$$

并称为标量场 ϕ 的拉普拉斯量, 其中 $\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算符, 方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{A. 11})$$

称为拉普拉斯方程, 这是一个二阶线性齐次偏微分方程, 它的解叫作调和函数。

将 $\mathbf{a} = \nabla \phi$ 带入式(A. 8), 并利用式(A. 6), 得

$$\nabla^2 \phi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma}{\tau} \quad (\text{A. 12})$$

矢量场 \mathbf{a} 的拉普拉斯量 $\nabla^2 \mathbf{a}$ 是一个矢量, 在直角坐标系 xyz 中, 它的分量等于矢量 \mathbf{a} 各分量的拉普拉斯量, 即

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{i} + \nabla^2 a_y \mathbf{j} + \nabla^2 a_z \mathbf{k} \quad (\text{A. 13})$$

(4) 矢量场旋度

矢量场 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 在指定时刻 t 在点 $M(x, y, z)$ 处的旋度是一个矢量, 它的大小等于沿该点处的面元周界上矢量 \mathbf{a} 的环量与面元面积之比的极限的最大值, 即等于沿该点处单位面积面元周界上矢量 \mathbf{a} 的环量的最大值, 它的方向就是使上述比值的极限取最大值的面元法线方向, 记作

$$\operatorname{rota} = \left(\mathbf{n}_{\max} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} \right) \mathbf{n}_m \quad (\text{A. 14})$$

式中, 括号内的量表示面元的法线 \mathbf{n} 取任意方向时极限 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ 的最大值, \mathbf{n}_m 表示上述极限取最大值时面元 σ 的法向单位矢量。

旋度沿任意方向 \mathbf{n} 的投影, 等于 \mathbf{a} 沿以该方向为法向的单位面积面元周界上的环量, 即

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} \quad (\text{A. 15})$$

根据上面定义, 在指定时刻场中某点处矢量场的旋度, 也就是该时刻该点处矢量场的最大环量密度, 它描述了该时刻该点处由矢量场随空间分布所决定的涡旋强度。如果在场中各点处 $\operatorname{rota} = 0$, 则称矢量场 \mathbf{a} 为无旋场。

在直角坐标系 xyz 中, 矢量场 \mathbf{a} 的旋度可表示为

$$\begin{aligned} \operatorname{rota} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

(5) 矢量微分运算公式

① 对两个物理量场乘积的矢量微分运算公式

$$(a) \nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$$

$$(b) \nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$(c) \nabla \times (\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla \times \mathbf{a} + \nabla\phi \times \mathbf{a}$$

$$(d) \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

$$(e) \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$$

$$(f) \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a})$$

② 对物理量场的两次矢量微分运算公式

$$(a) \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$$

$$(b) \nabla \times \nabla\phi = 0$$

$$(c) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$(d) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$(e) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$(f) \nabla^2(\phi\psi) = \psi \nabla^2 \phi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$$

例 A.1 设 $F = F(\phi)$, $\phi = \phi(x, y, z, t)$, 证明: $\text{grad}F(\phi) = F'(\phi)\text{grad}\phi$.

$$\begin{aligned} \text{证明: } \quad \text{grad}F(\phi) &= F'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + F'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + F'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= F'(\phi) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= F'(\phi) \text{grad}\phi \end{aligned}$$

例 A.2 证明: $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$.

证明: 利用矢量微分运算公式①中式(d), 令 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, 得

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} \nabla a^2 = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

$$\text{所以} \quad (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

A3 积分关系式

(1) 高斯公式

若空间区域 τ 的边界曲面 σ 是光滑的(或分片光滑的), 标量场函数 $\phi(x, y, z, t)$ 和矢量场函数 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 的各分量在指定时刻 t 在闭区域 $\tau = \tau \cup \sigma$ 上连续, 在 t 内具有对 x, y, z 的连续偏导数, \mathbf{n} 为曲面 σ 上面元 $d\sigma$ 的外法向单位矢量, 则有

$$\int_{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau = \oint_{\sigma} \cos(\mathbf{n}, x) \phi d\sigma, \quad \int_{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\tau = \oint_{\sigma} \cos(\mathbf{n}, y) \phi d\sigma, \quad \int_{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial z} d\tau = \oint_{\sigma} \cos(\mathbf{n}, z) \phi d\sigma \quad (\text{A. 19})$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{a} d\tau = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\sigma = \oint_{\sigma} \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A. 20})$$

$$\int_{\tau} \nabla \phi d\tau = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \phi d\sigma \quad (\text{A. 21})$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{a} d\tau = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{a} d\sigma \quad (\text{A. 22})$$

(2) 斯托克斯公式

若光滑曲面 σ 的边界为光滑曲线 L , 矢量场函数 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 的各分量在指定时刻 t 在 $\sigma \cup L$ 上连续, 在 σ 内具有对 x, y, z 的连续偏导数, 则有

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\sigma} \text{rota} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{A. 23})$$

式中, \mathbf{n} 是曲面 σ 上面元 $d\sigma$ 的法向单位矢量, 其指向与封闭曲线 L 正向的关系遵从右手法则。

特别地, 在 xy 平面上, 有

$$\oint_L a_x dx + a_y dy = \int_{S_z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{A. 24})$$

式中, L 为平面区域 S_z 的边界, 式(A. 24) 称为格林(Green) 公式。

例 A.3 如果 $\mathbf{V} = \nabla \phi$, 且 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \phi = 0$, 证明: $\int_{\tau} V^2 d\tau = \oint_{\sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma$ 。

证明: 利用矢量微分运算公式①中式(b), 令 $\mathbf{a} = \nabla \phi$, 并注意 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 得

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi$$

再利用高斯公式(A. 20), 得

$$\int_{\tau} V^2 d\tau = \int_{\tau} \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) d\tau = \oint_{\sigma} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma$$

A4 矢量式和标量式

(1) 无旋场及其标量势

如果矢量场 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 的各分量在一维单连通空间区域 Ω 内对 x, y, z 有连续偏导数, 则以下五种说法是彼此等价的, 即由其中之一可推其余:

① 矢量场 \mathbf{a} 是无旋场, 即在任意时刻, 在区域 Ω 内 $\text{rota} = 0$;

② 矢量场 \mathbf{a} 沿 Ω 内任一封闭曲线 L 的环量恒等于零, 即 $\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = 0$;

③ 矢量场 \mathbf{a} 沿 Ω 内任一曲线 l 的环量 $\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ 与曲线的路径无关, 只与端点位置和时刻 t 有关;

④ 矢量场 \mathbf{a} 是有势场, 即存在一个标量场 $\phi(x, y, z, t)$ 使 $\mathbf{a} = \text{grad}\phi$, 称标量场 $\phi(x, y, z, t)$ 为无旋场 \mathbf{a} 的标量势, 简称势, 已知 \mathbf{a} , 求 ϕ 的公式为

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x_0, y_0, z_0, t) + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{x, y, z} a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (\text{A. 25})$$

⑤ $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ 是某一标量场函数 $\phi(x, y, z, t)$ 对空间的全微分, 即 $a_x dx +$

$a_y dy + a_z dz = \delta\phi, \phi(x, y, z, t)$ 就是矢量场 \mathbf{a} 的标量势。

(2) 无散场及其矢量势

如果矢量场 $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ 的各分量在二维单连通区域 Ω 内对 x, y, z 有连续偏导数, 则以下三种说法是彼此等价的:

① 矢量场 \mathbf{a} 是无散场, 即在任意时刻, 在区域 Ω 内 $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$;

② 在任意时刻, 矢量场 \mathbf{a} 通过 Ω 内任一封闭曲面 σ 的通量等于零, 即 $\oint_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$;

③ 矢量场 \mathbf{a} 通过 Ω 内任一曲面 σ 的通量 $\int_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ 只由它的周界 L 决定, 而与曲面形状无关。

容易证明, 如果矢量场 \mathbf{a} 是无散场, 则在任一时刻, 通过同一矢量管不同截面的 \mathbf{a} 的通量彼此相等。由此可以进一步证明, 在无散场中, 矢量线和矢量管都不可能产生和消失, 只能起止于边界或自成封闭回线和封闭环。因此, 无散场又称为管式场。

按照矢量微分运算公式 ② 中式 (c), 对于任何一个矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ 恒有 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, 即由任一矢量场 \mathbf{A} 所产生的旋度场 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 是无散场。反过来也可以证明, 如果矢量场 \mathbf{a} 是二维单连通区域 Ω 的无散场, 则存在一个矢量场 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, 称矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ 为无散场的矢量势。

显然, 一个给定的无散场 \mathbf{a} 的矢量势不是唯一的。事实上, 若 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ 满足 $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{a}$, 则对于任一标量场函数 $\psi(x, y, z, t), \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi$ 也满足 $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \mathbf{a}$ 。

已知无散场 \mathbf{a} 求其矢量势 \mathbf{A} 的问题, 是一个求解方程 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}$ 的问题, 为了求得确定的矢量势 \mathbf{A} , 需附加一定的条件, 例如 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。事实上, 若 \mathbf{A}_1 满足 $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{A}_1$, 但 $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 \neq 0$, 可取 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla \psi$ 为矢量势, 其中 ψ 满足 $\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}_1$, 此时便有 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \nabla^2 \psi = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0$ 。

现在求同时满足 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的矢量场 \mathbf{A} , 为此, 令 $\nabla \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, 则有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\omega}$$

利用矢量微分运算公式 ② 中式 (d), 有

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$$

考虑附加条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 便得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$$

这是一个矢量形式的泊松方程, 它的解为

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta, t)}{r} d\tau \quad (\text{A. 26})$$

式中, $r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}$, $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, 积分时 x, y, z, t 看作参数。

附录 B 笛卡儿张量简介

要确定一个客观存在的物理量,首先要规定一种单位制作为测量的基准,对于某些物理量来说,如果在规定的单位制下,将测量结果用一个数来表述就足够了,这些物理量就称为标量。然而对另一些物理量来说,只用一个数来描述是不够的,还须指出其空间方向,这些物理量就是矢量。在三维空间中,取定坐标系后,一个矢量由三个有序实数来确定,这三个实数就是该矢量在坐标系中的分量。

除了标量和矢量以外,还有一些更复杂的物理量。例如,在取定单位制和坐标系后,流场中某点处的形变状态和应力状态,都需要九个数才能描述,而描述应力分布的不均匀程度,则需要 27 个数,如此等等。为了描述更复杂的物理量,人们引入了张量的概念。张量是标量和矢量的推广,而标量和矢量可以看作张量的特殊情形。

这里,仅介绍张量的一些基本知识,并限于三维欧几里得(Euclidean)空间中正交笛卡儿(Cartesian)坐标系下的张量,又称为笛卡儿张量,简称张量。

B1 笛卡儿张量概念

(1) 坐标变换(指标与求和符号的约定)

一个物理方程是物质运动的某种客观规律的描述,应在坐标变换下保持有效,因此,尽管同一矢量或张量在不同坐标系中的分量是不同的,但是,它们之间必然遵从一定的变换关系。设 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 是正交笛卡儿坐标系 $x_1 x_2 x_3$ 中的单位矢量, $\bar{\mathbf{i}}_1, \bar{\mathbf{i}}_2, \bar{\mathbf{i}}_3$ 是同原点的另一正交笛卡儿坐标系 $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ 中的单位矢量,如图 B.1 所示。显然,两组基矢量之间的变换关系为

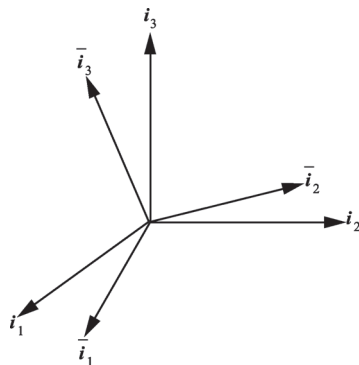


图 B.1 单位基矢量

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{i}}_1 = \alpha_{11} \mathbf{i}_1 + \alpha_{12} \mathbf{i}_2 + \alpha_{13} \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 = \alpha_{21} \mathbf{i}_1 + \alpha_{22} \mathbf{i}_2 + \alpha_{23} \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{i}}_3 = \alpha_{31} \mathbf{i}_1 + \alpha_{32} \mathbf{i}_2 + \alpha_{33} \mathbf{i}_3 \end{cases} \quad (\text{B. 1a})$$

即

$$\bar{\mathbf{i}}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \mathbf{i}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B. 1b})$$

其中 $\alpha_{ij} = \bar{\mathbf{i}}_i \cdot \mathbf{i}_j = \cos(\bar{\mathbf{i}}_i, \mathbf{i}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)$ (B. 2)

而矩阵 α_{ij} 是正交方阵, 满足

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \bar{\mathbf{i}}_i \cdot \bar{\mathbf{i}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B. 3})$$

式中, δ_{ij} 称为克罗内克-得尔塔(Kronecker-delta)。矢径 \mathbf{r} 在两个坐标系中的解析表达式分别为

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j x_j \quad \text{和} \quad \mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 \bar{\mathbf{i}}_j \bar{x}_j$$

因
$$\sum_{j=1}^3 \bar{\mathbf{i}}_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j x_j \quad (\text{B. 4})$$

上式两边点乘 $\bar{\mathbf{i}}_i$, 得

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \bar{x}_j = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

即
$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B. 5a})$$

式(B. 5a)就是两个正交笛卡儿坐标系之间的变换公式, 如果在式(B. 4)两边点乘 \mathbf{i}_i , 则得逆变换公式为

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \bar{x}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B. 6a})$$

对于任何一个自由矢量, 总可以把它平移到使矢量线段的起点与坐标原点重合, 因此, 对矢径分析得出的结论, 同样适用于一切自由矢量。设矢量在两个坐标系中的分量分别为 a_1, a_2, a_3 和 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, 则它们之间的变换关系为

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} a_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B. 7a})$$

$$a_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \bar{a}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B. 8a})$$

在张量理论中, 经常会遇到类似(B. 1a)和(B. 8a)等的表达式, 尽管已经把式(B. 1a)缩写为式(B. 1b), 但是仍然不够简洁。为了使书写更加简洁, 把“($i = 1, 2, 3$)”和求和符号省去, 即做如下约定:

① 某字母指标在一项中出现一次时, 表示该指标从 1 取到 3 (n 维空间中是从 1 取到 n);

② 同一字母指标在一项中出现两次时, 表示该指标从 1 取到 3 (n 维空间中是从 1 取到 n) 求和。

例如, 坐标系 $x_1 x_2 x_3$ 可简述为坐标系 x_i , 在取定的坐标系下, 矢量 \mathbf{a} 完全由它的分量 a_1, a_2, a_3 决定, 因此, 可简单地用 a_i 表示矢量 \mathbf{a} , $\phi(x_i, t)$ 表示场函数 $\phi(x_1, x_2,$

x_3, t), 而 $\partial\phi/\partial x_i$ 表示梯度 $\nabla\phi$, $\partial^2\phi/\partial x_i\partial x_i$ 表示拉普拉斯量 $\partial^2\phi$ (不能写成 $\partial^2\phi/\partial x_i^2$), $\partial a_i/\partial x_i$ 表示散度 $\nabla\cdot\mathbf{a}$, 等等。

按照约定, 式(B. 1b)可简写为

$$\bar{\mathbf{i}}_i = \alpha_{ij}\mathbf{i}_j \quad (\text{B. 1c})$$

而式(B. 5a)~(B. 8a)则分别简写为

$$\bar{x}_i = \alpha_{ij}x_j \quad (\text{B. 5b})$$

$$x_i = \alpha_{ij}\bar{x}_j \quad (\text{B. 6b})$$

$$\bar{a}_i = \alpha_{ij}a_j \quad (\text{B. 7b})$$

$$a_i = \alpha_{ij}\bar{a}_j \quad (\text{B. 8b})$$

重复出现的指标称为哑标或和标, 单独出现的指标称为自由标, 哑标字母可以任意改变, 例如, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = a_j b_j$, 都表示 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。

例 B.1 定义排列记号

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ 是 } 1, 2, 3 \text{ 的正轮换} \\ -1 & i, j, k \text{ 是 } 1, 2, 3 \text{ 的反轮换} \\ 0 & i, j, k \text{ 中至少有两个取相同值} \end{cases} \quad (\text{B. 9})$$

试证明: ① $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$; ② $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \epsilon_{ijk}a_i b_j c_k$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: ①} \quad \epsilon_{1jk}a_j b_k &= \epsilon_{111}a_1 b_1 + \epsilon_{112}a_1 b_2 + \epsilon_{113}a_1 b_3 + \epsilon_{121}a_2 b_1 \\ &\quad + \epsilon_{122}a_2 b_2 + \epsilon_{123}a_2 b_3 + \epsilon_{131}a_3 b_1 + \epsilon_{132}a_3 b_2 + \epsilon_{133}a_3 b_3 \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_1 \end{aligned}$$

同理 $\epsilon_{2jk}a_j b_k = a_3 b_1 - a_1 b_3 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_2$, $\epsilon_{3jk}a_j b_k = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_3$

综合上述结果, 有

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$$

矢量 \mathbf{a} 可表示为 $\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i$, 甚至简单地写成 $\mathbf{a} = a_i$, 因此, 上式可写成

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \epsilon_{ijk}a_j b_k \mathbf{i}_i$$

从而矢量场的旋度可表示为

$$\nabla\times\mathbf{a} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\mathbf{i}_i$$

② $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i c_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k c_i = \epsilon_{jki}a_j b_k c_i$ 将指标 j 换成 i , k 换成 j , i 换成 k , 得

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \epsilon_{ijk}a_i b_j c_k$$

例 B.2 试证明: ① $\nabla\cdot(\phi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\mathbf{a}$; ② $\nabla\times(\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla\times\mathbf{a} + \nabla\phi\times\mathbf{a}$ 。

$$\text{证明: ① } \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \frac{\partial(\phi a_i)}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$\text{② } \nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial(\phi a_k)}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \phi \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} a_k = \phi \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \phi \times \mathbf{a}$$

(2) 笛卡儿张量的定义

利用前面得出的变换公式并加以推广, 可以给出张量的定义, 并把矢量和标量统一在张量的概念之中。

定义 1 一阶笛卡儿张量(又称笛卡儿矢量) 若在笛卡儿坐标系 x_i 中有 3 个量 a_i , 在坐标变换

$$\bar{x}_i = a_{ij} x_j \quad (\text{或逆变换 } x_i = a_{ij} \bar{x}_j)$$

下, 遵从变换公式

$$\bar{a}_i = a_{ij} a_j \quad (\text{或逆变换 } a_i = a_{ij} \bar{a}_j)$$

则 3 个量 a_i 定义一个新量 \mathbf{a} , 并称它为三维空间中的笛卡儿矢量或一阶笛卡儿张量, 记作

$$\mathbf{a} = a_i \quad \text{或简记为} \quad \mathbf{a} = a_i \quad (\text{B. 10})$$

3 个量 a_i 称为矢量 \mathbf{a} 在坐标系 x_i 中的分量, 而 3 个量 \bar{a}_i 则是同一矢量在坐标系 \bar{x}_i 中的分量。

定义 2 二阶笛卡儿张量 若在笛卡儿坐标系 x_i 中有 3 个量 a_{ij} , 在坐标变换 (B. 5) 下, 遵从变换公式

$$\bar{a}_{ij} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{ln} \quad (\text{或逆变换式 } a_{ij} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \bar{a}_{ln}) \quad (\text{B. 11})$$

则 3^2 个量 a_{ij} 定义一个新的量 \mathbf{a} , 并称它为三维空间中的二阶笛卡儿张量, 记作

$$\mathbf{a} = a_{ij} \quad \text{或简记为} \quad \mathbf{a} = a_{ij} \quad (\text{B. 12})$$

3^2 个量 a_{ij} 称为张量 \mathbf{a} 在坐标系 x_i 中的分量, 而 3^2 个量 \bar{a}_{ij} 是同一张量在坐标系 \bar{x}_i 中的分量。

矢量 \mathbf{a} 可用它的分量表示为行矩阵和列矩阵 \mathbf{a}_i , 二阶张量 \mathbf{a} 则可用它的分量表示为一个方阵 \mathbf{a}_{ij} , 利用单位基矢量 \mathbf{i}_i , 矢量 \mathbf{a} 可表示为 $\mathbf{a} = \mathbf{i}_i a_i$, 仿此, 二阶张量可表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_i a_i \quad (\text{B. 13})$$

其中

$$\mathbf{a}_i = a_{ij} \mathbf{i}_j$$

它是矩阵 \mathbf{a} 的行矢量, 从而有

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_i \mathbf{a}_{ij} \quad (\text{B. 14})$$

式 (B. 13) 右端是三项并矢之和, 而式 (B. 14) 右端是九项并矢之和。两个矢量的并矢定义一个二阶张量, 可由两个矢量的分量按矩阵乘法组成, 例如

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$$

定义 3 r 阶笛卡儿张量 若在笛卡儿坐标系中有 3^r 个量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 在坐标变换 (B. 5) 下, 遵从变换公式

$$\bar{a}_{i_1 i_2 \dots i_r} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_r j_r} a_{j_1 j_2 \dots j_r} \quad (\text{B. 15})$$

或逆变换

$$a_{i_1 i_2 \dots i_r} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_r j_r} \bar{a}_{j_1 j_2 \dots j_r}$$

则 3^r 个量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 定义一个新的量 \mathbf{a} , 并称它为三维空间中 r 阶的笛卡儿张量, 记作

$$\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (\text{B. 16})$$

3^r 个量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 称为张量 \mathbf{a} 在坐标系 x_i 中的分量, 而 3^r 个量 $\bar{a}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 是同一张量在坐标系 \bar{x}_i 中的分量。

由于张量可用它的分量简单表示, 可以直接称 \mathbf{a}_i 为矢量, \mathbf{a}_{ij} 为二阶张量, $\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 为 r 阶张量。

定义 4 零阶张量 (又称标量) 若在坐标系 x_i 中有 1 个 (3^0 个或 n^0 个) 量 $f(x_i)$, 在任何坐标变换 $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_i)$ 下保持不变, 即

$$f(\bar{x}_i) = f(x_i) \quad \text{或记为} \quad \bar{f} = f \quad (\text{B. 17})$$

则称这个量为标量或零阶张量。

(3) 几种特殊张量

① 单位张量

容易证明, 克罗内克 δ_{ij} 函数组成一个二阶张量, 事实上, 根据定义, δ_{ij} 与坐标系无关, 对于坐标系 x_i 中的 δ_{ij} 和 \bar{x}_i 中的 $\bar{\delta}_{ij}$, 恒有 $\delta_{ij} = \bar{\delta}_{ij}$, 而另一方面

$$\alpha_{il} \alpha_{jm} \delta_{lm} = \alpha_{il} \alpha_{jl} = \delta_{ij}$$

所以

$$\bar{\delta}_{ij} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \delta_{lm}$$

表明 3^2 个量 δ_{ij} 遵从变换公式 (B. 11), 因此, 它们组成一个二阶张量, 此张量可记为

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\delta}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 18})$$

并称它为单位张量, 它也可用并矢表示为

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \quad (\text{B. 19})$$

② 零张量

全分量都等于零的张量称为零张量, 记为 $\mathbf{0}$ 。显然, 零张量确实遵从张量的变换关系式。因此, 如果一个张量在某坐标系中为零张量, 则它在任何坐标系中都是零张量。

③ 对称张量和反对称张量

如果变换一个张量分量的某两个指标时, 其值不变, 则称该张量关于这两个指标是对称的; 如果交换一个张量的分量的某两个指标时, 其绝对值不变, 但符号改变, 则

称该张量关于这两个指标是反对称的。特别是对于一个二阶张量 a_{ij} , 如果

$$a_{ij} = a_{ji}$$

则称为二阶对称张量, 如果

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

则称为二阶反对称张量。

显然, 一个二阶对称张量只有 6 个独立分量, 一个二阶反对称张量只有 3 个独立分量。如果 a_{ij} 是二阶反对称张量, 则有

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0$$

$$a_{12} = -a_{21} = -\omega_3, \quad a_{13} = -a_{31} = -\omega_2, \quad a_{23} = -a_{32} = -\omega_1$$

即

$$a_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k$$

所以

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 3 个量 ω_i 定义一个本征变换(保持右手系的变换或保持左手系的变换)下的矢量, 称这样的矢量为伪矢量。因此, 在坐标变换 $\bar{x}_i = \alpha_{ij}x_j$ 下, 有

$$\bar{a}_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}a_{lm} = -\alpha_{il}\alpha_{jm}\epsilon_{lmn}\omega_n$$

再由 $\bar{\mathbf{i}}_i \times \bar{\mathbf{i}}_j = \pm \bar{\mathbf{i}}_k$ (i, j, k 是 1, 2, 3 的轮换), 得

$$\epsilon_{lmn}\alpha_{il}\alpha_{jm} = \pm \alpha_{kn}$$

所以

$$\bar{a}_{ij} = -(\pm \alpha_{kn}\omega_n)$$

另一方面, \bar{a}_{ij} 仍是反对称的, 有

$$\bar{a}_{ij} = -\epsilon_{ijk}\bar{\omega}_k = -\bar{\omega}_k$$

从而

$$\bar{\omega}_k = \pm \alpha_{kn}\omega_n$$

式中, 右端在本征变换下取正号, 反之取负号。上式说明, 3 个量 ω_k 定义一个伪矢量。

B2 张量的代数运算

(1) 两张量相等、两张量的和与差

定义 1 两张量相等 设 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, $\mathbf{b} = b_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 是两个 r 阶张量, 如果它们的分量对应相等, 即

$$a_{i_1 i_2 \dots i_r} = b_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

则称这两个张量相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

定义 2 两张量和 两个同阶张量诸对应分量之和所组成的张量, 称为这两个张量的和。例如, 对于两个 r 阶张量 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 及 $\mathbf{b} = b_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 它们的和为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_{i_1 i_2 \dots i_r} + b_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (\text{B. 20})$$

定义 3 两张量差 两个同阶张量诸对应分量之差所组成的张量,称为两个张量的差。例如对于两个 r 阶张量 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 及 $\mathbf{b} = b_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 它们的差为

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = a_{i_1 i_2 \dots i_r} - b_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (\text{B. 21})$$

显然,如果两个张量相等,则它们的差是一个同阶的零张量,反之亦然。

定理 1 一个张量可以分解为对称张量与反对称张量之和,而且这种分解是唯一的。

证明: 仅就二阶张量的情形加以证明。设 t_{ij} 为二阶张量,可分解为对称张量 s_{ij} 和反对称张量 a_{ij} 之和,即

$$t_{ij} = s_{ij} + a_{ij} \quad (\text{B. 22})$$

其中

$$s_{ij} = s_{ji}, a_{ij} = -a_{ji}$$

只要具体求出 s_{ij} 和 a_{ij} 的唯一确定的表达式,该定理得证。事实上,由

$$t_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$$

交换两下标的次序,并利用式(B. 22),得

$$t_{ji} = s_{ij} - a_{ij}$$

由以上两式得

$$\begin{cases} s_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) \\ a_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}) \end{cases} \quad (\text{B. 23})$$

定理得证。

(2)张量的缩并、两张量的简单乘积和内积

定义 4 张量缩并 在一个 $r(r \geq 2)$ 阶张量中,取某两个指标相等,并按此指标从 1 取到 n (n 维空间中是从 1 取到 n) 求和的运算,叫作该张量对这两个指标的缩并。缩并的结果,得到一个 $r-2$ 阶张量。

例如,二阶张量 a_{ij} 的缩并 $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ 是一个标量,称为张量 a_{ij} 的不变量。

定义 5 两张量简单乘积 一个 r 阶张量 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 与一个 s 阶张量 $\mathbf{b} = b_{j_1 j_2 \dots j_s}$ 的简单乘积(或简称乘积)是一个 $r+s$ 阶张量,它的分量由这两个张量的分量相乘而得,即

$$\mathbf{ab} = a_{i_1 i_2 \dots i_r} b_{j_1 j_2 \dots j_s} \quad (\text{B. 24})$$

例如,标量 λ 与 r 阶张量 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 的乘积 $\lambda \mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 仍是一个 r 阶张量。矢量 $\mathbf{a} = a_i$ 与矢量 $\mathbf{b} = b_j$ 的乘积 $\mathbf{ab} = a_i b_j$ 是一个二阶张量,这就是前面提到的并矢。矢量 \mathbf{a} 与二阶张量 \mathbf{b} 的乘积 $\mathbf{ab} = a_i b_{jk}$ 是一个三阶张量。两个二阶张量 $\mathbf{a} = a_{ij}$ 和 $\mathbf{b} = b_{kl}$ 的乘积 $\mathbf{ab} = a_{ij} b_{kl}$ 是一个四阶张量。注意,两张量的乘积一般不遵从交换律。

定义 6 两张量内积 两张量的内积是它们的简单乘积对分别属于两张量的指

标的缩并。

例如,二阶张量 $a = a_{ij}$ 与矢量 $b = b_k$ 有两个内积,分别为 $a_{ij}b_j = a \cdot b$ 和 $a_{ij}b_i = b \cdot a_{ij} = b \cdot a$,它们都是矢量。二阶张量 $a = a_{ij}$, $b = b_{kl}$ 有四个内积,其中 $a_{ij}b_{jl} = a \cdot b$ 和 $a_{ij}b_{ki} = b_{ki}a_{ij} = b \cdot a$ 都是二阶张量,还可以进行一次缩并而得标量,其结果称为原两张量的二次内积,记作 $a:b = a_{ij}b_{ji} = b_{ji}a_{ij} = b:a$ 。

(3) 张量识别定理(商法则)

直接利用定义来判定所给的一组量是否组成一个张量是比较麻烦的。下面的定理将简便地解决这个问题。

定理 2 张量识别定理(商法则) 设坐标系 x_i 中有 3^r 个量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, $b_{i_1 i_2 \dots i_s}$ 是任意一个 s 阶张量,如果两者的简单乘积 $a_{i_1 i_2 \dots i_r} b_{i_1 i_2 \dots i_s}$ 是一个 $r+s$ 阶张量,或者两者的内积如 $a_{i_1 i_2 \dots i_r} b_{i_1 i_2 \dots i_s}$ 是一个 $r+s-2$ 阶张量,则 3^r 个量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 定义一个 r 阶张量。

证明:为简单计,这里只证相应的简单命题,即对于坐标系 x_i 中的 3^r 个量 a_{ij} 和任意矢量 b_k ,如果简单乘积 $a_{ij}b_k$ 是三阶张量,或者内积 $a_{ij}b_j$ 是矢量,则 3^r 个量 a_{ij} 定义一个二阶张量。

先证明第一种情况。由于 $a_{ij}b_k$ 是三阶张量, b_k 是任意矢量,则在坐标变换 $\bar{x}_i = \alpha_{ij}x_j$ 下,有

$$\bar{a}_{ij}\bar{b}_k = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{lm}b_n = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\bar{b}_n$$

即

$$(\bar{a}_{ij} - \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn})\bar{b}_k = 0$$

由于 b_k 是任意矢量,可取该矢量使 \bar{b}_k 为非零的,因此,由上式得

$$\bar{a}_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}$$

表明 a_{ij} 遵从二阶张量的变换式,所以它们定义一个二阶张量。

再证明第二种情况。由于 $a_{ij}b_j$ 是矢量, b_j 是任意矢量,则在坐标变换 $\bar{x}_i = \alpha_{ij}x_j$ 下,有

$$\bar{a}_{ij}\bar{b}_j = \alpha_{ik}\alpha_{jl}b_l = \alpha_{ik}a_{kl}(\alpha_{jl}\bar{b}_j)$$

即

$$(\bar{a}_{ij} - \alpha_{ik}\alpha_{jl}a_{kl})\bar{b}_j = 0$$

由 \bar{b}_j 的任意性得

$$\bar{a}_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}a_{kl}$$

表明 3^2 个量 a_{ij} 定义一个二阶张量,证毕。

利用上述定理容易验证一组量是否定义一个张量。例如,对任意矢量 a_i ,有 $a_i = \delta_{ij}a_j$,所以 δ_{ij} 定义一个二阶张量,这就是单位张量。又如,对于任何矢量场 $a_i = a_i(x_j)$ 和任意坐标微分 dx_j ,有 $da_i = \partial a_i / \partial x_j dx_j$,由于 da_i 和 dx_j 都是矢量,所以 $\partial a_i / \partial x_j$ 定义二阶张量,称为矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 的导数张量,记作

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

例 B.3 速度分解定理 设流体中的速度场为 $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, 在时刻 t , 在场中点 $M(\mathbf{r})$ 处任取一流体微团, 微团上与点 M 邻近的一点 $M'(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ 的速度记为 $\mathbf{V}'=\mathbf{V}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t)$, 试将速度 \mathbf{V}' 进行分解。

解: 时刻点 M' 处的速度分量为

$$u'_i = u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) = u_i(x_j + dx_j, t)$$

将上式右端进行泰勒级数展开, 略去高阶项, 得

$$u'_i = u_i(x_j, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1)$$

将导数张量 $\partial u_i/\partial x_j$ 分为对称张量 s_{ij} 与反对称张量 a_{ij} 之和, 而 $\partial u_i/\partial x_j = s_{ij} + a_{ij}$, 其中 $s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 是形变率张量的分量, 而 $a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 所对应的伪矢量是 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V}$, 由此得

$$u'_i = u_i(x_j, t) + s_{ij} dx_j + a_{ij} dx_j \quad (2)$$

其中 $a_{ij} dx_j = -\varepsilon_{ijk} \omega_k dx_j = (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r})_i$, 所以

$$u'_i = u_i(x_j, t) + s_{ij} dx_j + (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r})_j$$

即

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} \quad (3)$$

上式表明, 流体微团上与点 M 邻近的一点 M' 的速度, 可分解为随 M 点的平移速度与相对 M 点的形变速度及绕 M 点的旋转速度三者之和。

B3 各向同性张量

定义 各向同性张量 如果一个张量的各分量, 在坐标系的正交变换下保持不变, 则称此张量为各向同性张量。

连续介质场中某些描述介质特性的物理量具有张量特征, 当介质对其中进行的物理过程呈现各向同性时, 具有这些特性的张量就是各向同性张量。

显然, 零阶张量(标量)和任意阶零张量是各向同性张量, 非零的一阶张量(矢量)不可能是各向同性张量。因为如果矢量 \mathbf{a}_i 是各向同性张量, 则在坐标变换 $\bar{x}_i = \alpha_{ij} x_j$ 下, 有

$$\bar{a}_i = \alpha_{ij} a_j = a_i = \delta_{ij} a_j$$

即

$$(\alpha_{ij} - \delta_{ij}) a_j = 0$$

但 $\alpha_{ij} \neq \delta_{ij}$, 只有 $a_i = 0$, 即只有零矢量才是各向同性的。

容易看出, δ_{ij} 是二阶各向同性张量, 而 $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ 和 $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ 都是四阶各向同性张量, 在本征变换下, 排列记号 ϵ_{ijk} 是三阶各向同性张量。下面的定理说明了任意二阶至四阶各向同性张量的表达形式。

定理 1 二阶各向同性张量 任何二阶各向同性张量 a_{ij} 都可表示为

$$a_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (\text{B. 25})$$

其中 λ 是标量。

定理 2 三阶各向同性张量 任何三阶各向同性张量 a_{ijk} 都可表示为

$$a_{ijk} = \lambda \epsilon_{ijk} \quad (\text{B. 26})$$

其中 λ 是标量。

定理 3 四阶各向同性张量 任何四阶各向同性张量 a_{ijkl} 都可表示为

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (\text{B. 27})$$

其中 λ, μ, ν 是标量。

以上定理的证明从略。

B4 张量微分运算

(1) 张量对标量参数导数

如果张量 $\mathbf{a} = a_{ij}$ 的各分量是标量参数 t 的函数, 则称该张量是 t 的函数, 记为 $\mathbf{a}(t) = a_{ij}(t)$ 。如果对于参数 t 的任一增量 Δt , 有张量 \mathbf{a} 的增量 $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 比值 $\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}$ 的极限存在, 则称此极限为张量 \mathbf{a} 对标量参数 t 的导数, 记作 $d\mathbf{a}/dt$, 即

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} \quad (\text{B. 28})$$

显然, 张量 \mathbf{a} 对标量参数 t 的导数, 是一个与张量 \mathbf{a} 同阶的张量, 并可用各分量对该参数的导数表示, 即

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{a}_{ij}(t) \quad (\text{B. 29})$$

(2) 张量场对空间坐标偏导数

将标量场 $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x_i, t)$ 对空间坐标的偏导数 $\partial\phi/\partial x_i$ 定义为矢量, 也称为该标量场 ϕ 的梯度, 记作

$$\Delta\phi = \mathbf{i}_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

它描述该标量场的分布状态, 而将矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_j(x_i, t)$ 对空间坐标的偏导数 $\partial a_j / \partial x_i$ 定义为二阶张量, 也称为该矢量场的梯度, 记作

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} \quad (\text{B. 30})$$

它描述该矢量场的分布状态, 可以看出, 梯度张量 $\nabla \mathbf{a}$ 与导数张量 $d\mathbf{a}/d\mathbf{r}$ 的矩阵表示互为转置。

一般地, 一个 r 阶张量场 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 对空间坐标的偏导数 $\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r} / \partial x_i$, 定义一个 $r+1$ 阶张量, 称为该张量场的梯度, 记作

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_i} \quad (\text{B. 31})$$

它描述该张量场的分布状态。例如, 二阶张量场 $\mathbf{a} = a_{jk}$ 的梯度是一个三阶张量, 记作

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}$$

(3) 张量场散度及其积分关系式

矢量场 $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2 + \mathbf{i}_3 a_3$ 的梯度张量 $\nabla \mathbf{a} = \partial a_j / \partial x_i$ 的缩并, 就是矢量微分算符 ∇ 与矢量 \mathbf{a} 的内积, 称为矢量场 \mathbf{a} 的散度, 记作

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (\text{B. 32})$$

它是一个标量。类似地, 二阶张量场 $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{a}_3 = a_{jk}$ 的梯度 $\nabla \mathbf{a} = \partial a_{jk} / \partial x_i$ 对指标 i, j 的缩并, 就是算符 ∇ 与张量 \mathbf{a} 的内积, 称为张量场 \mathbf{a} 的散度, 记作

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \\ &= \mathbf{i}_1 \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{i}_2 \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{i}_3 \left(\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (\text{B. 33})$$

它是一个矢量。

一般地, 一个 r 阶张量场 $\mathbf{a} = a_{i_1 i_2 \dots i_r}$ 的散度, 是一个 $r-1$ 阶张量, 记作

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_1}} \quad (\text{B. 34})$$

关于矢量场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{a}$, 有积分关系式:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{a} d\tau = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\sigma$$

对于张量场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{a}$, 也有类似的积分关系式:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{a} d\tau = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\sigma \quad (\text{B. 35})$$

因为对任意 r 阶张量场 \mathbf{a} 的分量 $a_{i_1 i_2 \dots i_r}$, 利用高斯公式(B. 19), 有

$$\int_{\tau} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x_{i_1}} d\tau = \oint_{\sigma} n_{i_1} a_{i_1 i_2 \dots i_r} d\sigma$$

例 B. 4 设 \mathbf{a} 为矢量场, 求对称张量 $\mathbf{s} = s_{ij} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} + \nabla \mathbf{a} \right)$ 的散度。

解: 因为 $\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, $\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$, 则

$$\nabla \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a})$$

而

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla^2 a_j = \nabla^2 \mathbf{a}$$

于是 $\nabla \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{a}$

附录 C 正交曲线坐标系

在流体力学的某些问题中,采用正交曲线坐标系要比采用直角坐标系更简便。现在就来介绍正交曲线坐标系的一些知识和有关表达式。

C1 正交曲线坐标系概念

(1) 曲线坐标系的概念

设 xyz 为一正交笛卡儿坐标系,对于三个单值函数

$$q_i = q_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C. 1})$$

当雅可比(Jacobi)行列式

$$J = \frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$$

时,就能建立两个有序数集 $\{x, y, z\}$ 和 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 之间的一对一的变换关系,三维空间的一点既可用数组 $\{x, y, z\}$ 来表示,也可用数组 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 来表示。前者称为该点的正交笛卡儿坐标或直角坐标,后者称为该点的曲线坐标。由方程

$$q_i = (x, y, z) = \text{常数} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C. 2})$$

所决定的三个空间曲面族,称为曲线坐标系的坐标曲面族,两个不同族坐标曲面的交线称为坐标曲线。沿坐标曲线,只有某一曲线坐标发生变化,而其他两个坐标不变。例如,在由坐标曲面 $q_2(x, y, z) = \text{常数}$ 和 $q_3(x, y, z) = \text{常数}$ 相交而成的坐标曲线上,只有 q_1 变化而 q_2, q_3 保持常数,因此,称此曲线为 q_1 坐标曲线。类似地,可得 q_2 坐标曲线和 q_3 坐标曲线,如图 C.1 所示。过空间任一点都可引三条不同的坐标曲线,若三族坐标曲线处处正交,则称曲线坐标系为正交曲线坐标系,柱坐标系和球坐标系是最常见的正交曲线坐标系。

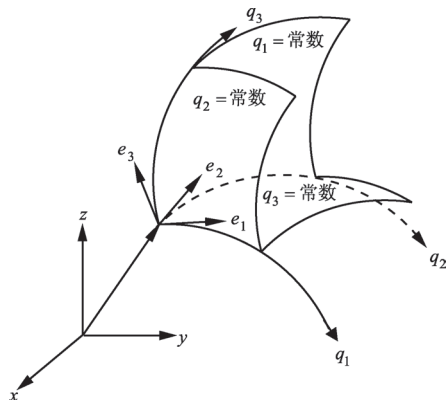


图 C.1 曲线坐标系

(2) 沿坐标曲线弧长的微分

在正交笛卡儿坐标系中,沿空间曲线弧长的微分是

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

沿 q_i 坐标曲线, 只有 q_i 变化而其他两个坐标保持不变, 从而有

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i$$

因为, 沿 q_i 坐标曲线弧长的微分为

$$ds_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} dq_i = h_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C. 3})$$

其中
$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C. 4})$$

称为拉梅系数, 一般它们是曲线坐标 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 的函数。式(C. 3)中只取正号是因为这里规定坐标曲线弧长增大的方向与坐标增大的方向一致。

有了沿坐标曲线弧长的微分公式, 不难写出正交曲线坐标系中体积元的表达式, 即

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (\text{C. 5})$$

例 C.1 试求柱坐标系和球坐标系中的拉梅系数, 沿坐标曲线弧长的微分和体积元表达式。

解: ① 如图 C. 2 所示, 正交笛卡儿坐标系 xyz 与柱坐标系 $R\varphi z$ 的变换关系为

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z$$

利用式(C. 4), 得柱坐标系中的拉梅系数为

$$h_R = 1, \quad h_\varphi = R, \quad h_z = 1$$

从而得沿各坐标曲线弧长的微分是

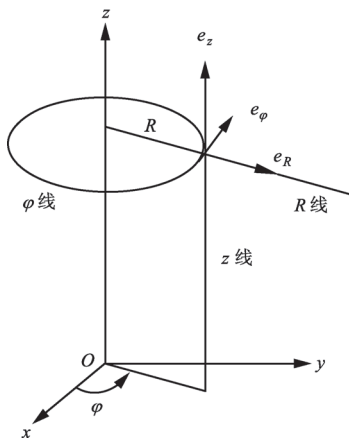


图 C. 2 柱坐标系

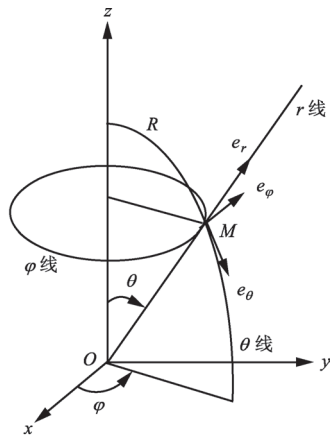


图 C. 3 球坐标系

$$ds_R = dR, \quad ds_\varphi = R d\varphi, \quad ds_z = dz$$

体积元表达式为

$$d\tau = R dR d\varphi dz$$

② 如图 C.3 所示, 正交笛卡儿坐标系 xyz 与球坐标系 $r\theta\varphi$ 的变换关系为

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta$$

利用式(C.4), 得拉梅系数为

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin\theta$$

从而得沿各坐标曲线弧长的微分是

$$ds_r = dr, \quad ds_\theta = r d\theta, \quad ds_\varphi = r \sin\theta d\varphi$$

体积元表达式为

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

(3) 正交曲线坐标系中单位基矢量及其偏导数

在正交笛卡儿坐标系 $x_1 x_2 x_3$ 中, 空间任一点 M 的位置矢径可表示为

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3$$

其单位基矢量为

$$\mathbf{i}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

但是在正交曲线坐标系 $q_1 q_2 q_3$ 中, 由于坐标 q_1, q_2, q_3 不全具有长度量纲, 尽管 $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$ 沿坐标曲线 q_i 的切线方向并指向坐标 q_i 增加的一侧, 但它的长度未必等于单位 1, 显然, 只有

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C.6})$$

才是单位基矢量。由坐标系的正交性, 有

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (\text{C.7})$$

正交曲线坐标系中的单位基矢量与正交笛卡儿坐标系中的单位基矢量的重要区别在于, 前者是局地基矢量, 它们的方向随空间点的不同而不同, 一般它们是曲线坐标 q_1, q_2, q_3 的函数。下面讨论正交曲线坐标系中的单位基矢量对坐标的偏导数。

由 $\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)$, 利用式(C.6), 有

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (h_i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial}{\partial q_i} (h_j \mathbf{e}_j)$$

即

$$h_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_j} + \mathbf{e}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} = h_j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q_i} + \mathbf{e}_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i}$$

注意, $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ 是单位矢量, 当 $i \neq j$ 时, $\partial \mathbf{e}_i / \partial q_j$ 平行于 \mathbf{e}_j , 而 $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ 是相互独立的, 因此, 上式两同方向的量对应相等, 故有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \mathbf{e}_j \quad (i \neq j) \quad (\text{C. 8})$$

又当 i, j, k 是 1, 2, 3 的轮换排列时, 有

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$$

因而

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q_i} \times \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \times \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q_i}$$

由式(C. 8)代入上式, 得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_i} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i)$$

即

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_k} \mathbf{e}_k \quad (i, j, k \text{ 是 } 1, 2, 3 \text{ 的轮换}) \quad (\text{C. 9})$$

C2 正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度和拉普拉斯量

(1) 正交曲线坐标系中梯度和矢量微分算符

标量场 ϕ 的梯度 $\nabla \phi$ 在某一方向的投影, 即梯度与该方向单位矢量的点积, 等于标量场 ϕ 沿该方向的方向导数。因此, 梯度与曲线坐标系中任一单位基矢量的点积, 等于标量场 ϕ 沿该坐标曲线的方向导数, 即

$$\mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

于是, 正交曲线坐标系中, 标量场 ϕ 的梯度表示为

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \quad (\text{C. 10})$$

且矢量微分算符 ∇ 表示为

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (\text{C. 11})$$

(2) 正交曲线坐标系中的散度和拉普拉斯量

在正交曲线坐标系中, 矢量场 \mathbf{a} 表示为

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

把矢量微分算符 ∇ 看作一个矢量, 并利用单位基矢量的正交性和偏导数公式, 容易求得矢量场 \mathbf{a} 的散度, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 a_3) \right] \quad (\text{C. 12})$$

如果令 $\mathbf{a} = \nabla \phi$, 利用式(C. 10), 容易求得标量场的拉普拉斯量的表达式, 即

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (\text{C. 13})$$

(3) 正交曲线坐标系中旋度

利用单位基矢量的正交性和偏导数公式, 可得正交曲线坐标系中的旋度为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \times (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 a_2) \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 a_3) \right] \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 a_1) \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

或写成

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C. 14})$$

正交曲线坐标系中矢量的拉普拉斯量 $\nabla^2 \mathbf{a}$ 可根据矢量微分运算公式, 即

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

利用前面得出的散度、梯度和旋度公式求得。

C3 正交曲线坐标系中物理量表达式

(1) 速度和加速度

由于曲线坐标不全具有长度的量纲, 正交曲线坐标系中速度的物理分量, 即速度矢量在各单位基矢量方向的投影, 不一定是 dq_i/dt ($i=1, 2, 3$), 而应是沿各坐标曲线的弧长对时刻 t 的导数, 即

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = h_i \frac{dq_i}{dt} \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{C. 15})$$

利用加速度公式

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

注意, 单位基矢量 \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) 只与空间位置有关, 速度的局地导数可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \mathbf{e}_3$$

而速度的迁移导数是

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 [(\mathbf{V} \cdot \nabla)v_i] \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 v_i [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{e}_i]$$

其中 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{e}_i = \sum_{l=1}^3 \frac{v_l}{h_l} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_l}$, 将单位基矢量的偏导数公式代入, 经整理后得

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left[\sum_{l=1}^3 \frac{v_l}{h_l} \frac{\partial v_i}{\partial q_l} + \left(v_i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - v_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \right) \frac{v_j}{h_i h_j} + \left(v_i \frac{\partial h_i}{\partial q_k} - v_k \frac{\partial h_k}{\partial q_i} \right) \frac{v_k}{h_i h_k} \right]$$

其中当 i 值取定后, i, j, k 是 1, 2, 3 的轮换排列。最后得正交曲线坐标系中的加速度分量表达式为

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \frac{v_l}{h_l} \frac{\partial v_i}{\partial q_l} + \left(v_i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - v_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \right) \frac{v_j}{h_i h_j} + \left(v_i \frac{\partial h_i}{\partial q_k} - v_k \frac{\partial h_k}{\partial q_i} \right) \frac{v_k}{h_i h_k} \quad (\text{C. 16})$$

(2) 形变率

为求某点 (q_1, q_2, q_3) 处的形变率, 先在该点建立局地正交笛卡儿坐标系 $x'_1 x'_2 x'_3$, 使三根 x'_i 轴分别与 q_i 曲线相切, 则该点处的形变率在 $x'_1 x'_2 x'_3$ 坐标系中表示为

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right)$$

其中 u'_i, u'_j 是速度的局地笛卡儿分量, 也可以认为是正交曲线坐标系中速度的物理分量。用 \mathbf{e}'_i 表示局地笛卡儿坐标系中的基矢量, 有

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = (\mathbf{e}'_j \cdot \nabla)(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{V}), \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} = (\mathbf{e}'_i \cdot \nabla)(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{V})$$

由于 \mathbf{e}'_i 为常矢量, 有

$$(\mathbf{e}'_j \cdot \nabla)(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{e}'_i \cdot [(\mathbf{e}'_j \cdot \nabla)\mathbf{V}]$$

代入 S_{ij} 的表达式, 并将微分算符外的 \mathbf{e}'_i 用 \mathbf{e}_i 代换, 得

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_i \cdot [(\mathbf{e}_j \cdot \nabla)\mathbf{V}] + \mathbf{e}_j \cdot [(\mathbf{e}_i \cdot \nabla)\mathbf{V}] \}$$

代入 \mathbf{V} 在曲线坐标系中的表达式, 并利用偏导数公式, 经计算并整理, 得

$$S_{ij} = \frac{h_j}{2h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v_j}{h_j} \right) + \frac{h_i}{2h_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{v_i}{h_i} \right) \quad (i \neq j) \quad (\text{C. 17})$$

$$\text{和} \quad S_{ij} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \frac{v_j}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} + \frac{v_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial q_k} \quad (\text{C. 18})$$

式(C. 18)中, i, j, k 是 1, 2, 3 的轮换排列。

利用广义牛顿应力公式, 容易求得应力在正交曲线坐标系中的表达式。

C4 柱坐标系和球坐标系中物理量表达式

现将上面的一般结果应用于柱坐标系和球坐标系, 把本书中涉及的有关表达式以列表的形式给出, 如表 C. 1 所示。

C.1 柱坐标系和球坐标系中的相关表达式

	柱坐标系	球坐标系
坐标	R, φ, z	r, θ, φ
与直角坐标系关系	$x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = z$	$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$
拉梅系数	$h_r = 1, h_\varphi = R, h_z = 1$	$h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r\sin\theta$
矢量微分算符	$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$
标量场的梯度	$\nabla\phi = \mathbf{e}_R \frac{\partial\phi}{\partial R} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$	$\nabla\phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi}$
矢量场的散度	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_R}{\partial R} + \frac{a_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r} a_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$
标量场拉普拉斯量	$\nabla^2\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2}$
矢量场的旋度	$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial a_R}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial R} \right) + \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{R} \frac{\partial(Ra_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial a_R}{\partial \varphi} \right]$	$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(a_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{e}_\theta \left[\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]$
形变率	$S_{RR} = \frac{\partial v_R}{\partial R}, S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_R}{R}, S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ $S_{R\varphi} = S_{\varphi R} = \left[\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v_\varphi}{R} \right) \right]$ $S_{\varphi z} = S_{z\varphi} = \frac{\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)}{2}$ $S_{zR} = S_{Rz} = \frac{\left(\frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{\partial v_R}{\partial z} \right)}{2}$	$S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r},$ $S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot\theta$ $S_{\theta r} = S_{r\theta} = \frac{\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)}{2}$ $S_{\theta\varphi} = S_{\varphi\theta} = \frac{\left(\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r} \cot\theta \right)}{2}$ $S_{\varphi r} = S_{r\varphi} = \frac{\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)}{2}$

名词索引

一至三画

- 一维流动 one-dimensional flow 76
二阶张量 second order tensor 269
二维流动 two-dimensional flow 138
几何相似 geometric similarity 204
大气压 atmosphere pressure 7
小扰动 microscopic disturbances (small
perturbation) 164
山谷风 slope wind 125
个别导数(物质导数) substantial
derivative 60
马格努斯效应 Magnus effect 84
马赫数 Mach number 206
 Π 定理 Π theorem 208

四画

- 无旋流动 irrotational flow 34
无量纲方程 dimensionless equation 205
无滑移条件 no slip condition 199
不可压缩流体 incompressible fluid 7
不稳定性 instability 11
比定压热容 specific heat at constant
pressure 72
比定容热容 specific heat at constant
volume 72
比容 specific volume 121
切应力 tangential stress 6
内能 internal energy 68
牛顿流体 Newtonian fluid 6
牛顿黏性定律 Newton's second law of
viscosity 6
反对称张量 anti-symmetric tensor 262

- 分子平均自由程 molecular mean free path
..... 3
分子黏性 molecular viscosity 236
计算流体力学 computational fluid
mechanics 3

五画

- 正压性 barotropy 124
正压流场 barotropic flow field 72
正压流体 barotropic fluid 72
可压缩性 compressibility 1
平均自由程 mean free path 3
平均值 mean value 32
极坐标 polar coordinates 36
卡门动量积分方程 Karman's integral
momentum equation 218
矢量 vector 16
矢量场 vector field 17
兰勃方程 Lamb equation 77
半经验理论 semiempirical theory 220
弗劳德数 Froude number 206
加速度 acceleration 16
皮托管 Pitot tube 9
皮叶克尼斯定理 Bjerknes' theorem 121
边界条件 boundary conditions 41
边界层 boundary layer 10
边界层方程 boundary layer equation 10
边界层厚度 boundary layer thickness
..... 214
边界层理论 boundary layer theory 10
对称张量 symmetric tensor 186
台风 typhoon 7

六画		连续性方程积分形式 integral equation of
动力学边界条件 dynamic boundary		continuity 26
condition 75		连续性方程微分形式 differential equation of
动力相似 dynamic similarity 204		continuity 26
动力黏性系数 dynamic viscosity		时均速度 time-averaged velocity 223
coefficient 6		时均值 time-averaged value 223
动压 dynamic pressure 79		时均流 time-averaged flow 220
动能 kinetic energy 68		体积力 volume force (body force) 62
动能方程 equation of kinetic energy 69		体积元 element of volume 4
动量方程 momentum equation 63		近似解 approximate solution 184
动量守恒 conservation of momentum 2		角形变 angular deformation 31
动量矩 moment of momentum 84		角速度 angular velocity 9
动量损失厚度 momentum loss		系统 system 23
thickness 215		状态方程 equation of state 124
扩散 diffusion 5		应力 stress 1
场函数 field function 17		应力分量 components of stress 6
压力 pressure 6		应力矢量 stress vector 63
压容力管 isobaric and isosteric		应力张量 stress tensor 184
pressure 120		完全气体 perfect gas 72
达朗贝尔佯谬 D'Alembert's paradox 9		初始条件 initial condition 51
曲线坐标系 curvilinear co-ordinate		层流 laminar flow 9
system 270		层流边界层 laminar boundary layer 184
传播速度 propagation velocity 9		局地导数 local derivative 18
自由面 free surface 75		张量 tensor 30
自由涡旋 free vortex 135		阿基米德原理 principle of Archimede 8
行进波 progressive wave 142		纳维-斯托克斯方程 Navier-Stokes
各向同性 isotropy 68		equation 9
七画		八画
形变率 rate of strain 30		环流 circulation 10
运动方程 equation of motion 172		表面波 surface wave 142
运动学边界条件 kinematical boundary		势函数 potential function 35
condition 74		势流 potential flow 35
扰动 perturbation 133		势能 potential energy 78
声速 velocity of sound 7		拉格朗日方法 Lagrangian method 15
克努森数 Knudsen number 4		拉格朗日变数 Lagrangian variable 15
连续介质 continuum 1		拉普拉斯方程 Laplace equation 37
连续性方程 equation of continuity 15		拉普拉斯算符 Laplace operator 253

- 直角坐标 Cartesian coordinate 16
- 奇点 singular point 112
- 欧拉方程 Euler equation 10
- 欧拉方法 Eulerian method 15
- 欧拉变数 Euler number 17
- 非牛顿流体 non-Newtonian fluid 16
- 非定常流动 unsteady flow 11
- 非惯性系 non inertial reference 66
- 罗斯贝数 Rossby number 206
- 质量力 mass force 62
- 质量守恒 conservation of mass 2
- 周期 period 142
- 单连通域 simple-connected region 36
- 单位张量 unit tensor 186
- 浅水波 shallow-water wave 164
- 法应力 normal stress 63
- 泊松方程 Poisson's equation 37
- 波长 wave length 143
- 波节点 node 151
- 波包迹线 wave packet 159
- 波动 wave motion 9
- 波列 wave train 157
- 波谷 trough 151
- 波轮廓 wave profile 146
- 波速 wave velocity 142
- 波峰 crest 151
- 波高 wave height 143
- 波幅 amplitude 143
- 波数 wave number 143
- 波群 group of waves 142
- 定常流动 steady flow 142
- 驻波 stationary wave 142
- 驻点 stagnation point 81
- 九画**
- 柯西-黎曼条件 Cauchy-Reimann
conditions 40
- 相似判据 similarity criteria 205
- 相似理论 principle of similitude 2
- 相速度 phase velocity 173
- 相容条件 compatibility condition 87
- 布拉休斯解 Blasius solution 217
- 点涡 point vortex 44
- 临界雷诺数 critical Reynolds
number 221
- 界面波 interfacial wave 169
- 重力流体 gravitational fluid 9
- 复连通域 multiply connected region 39
- 复势 complex potential 9
- 复速度 complex velocity 41
- 信风(贸易风) trade wind 125
- 脉动 fluctuation 184
- 脉动速度 fluctuating velocity 225
- 脉动值 fluctuating value 223
- 诱导速度 induced velocity 130
- 绕流 flow around a body 42
- 十画**
- 热力学第一定律 first law of
thermodynamics 70
- 热传导方程 equation of heat
conduction 203
- 热传导系数 heat conductivity coefficient ...
..... 68
- 热量 heat 68
- 特征尺度 characteristic dimension 3
- 涡旋 vortex 9
- 涡丝 vortex filament 129
- 涡线 vortex lines 113
- 涡度场 vorticity field 140
- 涡旋守恒 conservation of vortex 119
- 涡旋的保持性 permanence of vortex ... 119
- 涡管 vortex tube 113
- 涡管强度 intensity of vortex tube 115
- 流动 flow 1
- 流场 flow field 2

- 流网 flow net 40
- 流体 fluid 1
- 流体力学 fluid mechanics 1
- 流体动力学 fluid dynamics 8
- 流体质点 fluid particle 3
- 流体静力学 fluid statics 8
- 流函数 stream function 9
- 流线 stream line 21
- 流管 stream tube 23
- 调和函数 harmonic function 37
- 十一画
- 球坐标系 spherical coordinate system ... 22
- 理想流体 ideal fluid 7
- 排挤厚度(位移厚度) displacement
thickness 215
- 控制体 control volume 23
- 控制面 control surface 24
- 梯度 gradient 6
- 梯度力 gradient force 65
- 唯一性 uniqueness 41
- 偶极子 doublet 45
- 斜压流场 baroclinic flow field 72
- 斜压流体 baroclinic fluid 72
- 旋转 revolution 9
- 剪形变运动 shearing motion 52
- 剪形变率 rate of shear strain 31
- 混合长度 mixing length 228
- 混合长理论 mixing-length theory 227
- 深水波 deep-water wave 176
- 惯性力 inertia force 62
- 随机性 randomness 220
- 随机函数 random function 241
- 十二画
- 斯托克斯定理 Stokes' theorem 114
- 斯特劳哈尔数 Strouhal number 206
- 散度 divergence 26
- 量级 order of magnitude 204
- 量纲分析 dimension analysis 10
- 等比容面 isosteric surface 121
- 等压面 isobaric surface 72
- 等势线 isopotential line 36
- 等势面 equipotential surface 36
- 等流函数线 equi-stream function
lines 39
- 湍流 turbulent flow 3
- 十三画及以上
- 雷诺方程 Reynolds' equation 225
- 雷诺应力 Reynolds' stress 10
- 雷诺实验 Reynolds' experiment 220
- 雷诺数 Reynolds number 9
- 输运公式 transport formula 23
- 群速度 group velocity 142
- 静力学 statics 8
- 静力平衡方程 static balance equation ... 86
- 模拟 simulation 2
- 稳定性 stability 2
- 管流 pipe flow 8
- 摩擦力 frictional force 8
- 摩擦应力 frictional stress 239
- 瞬时速度 instantaneous velocity 15
- 瞬时值 instantaneous value 223
- 黏性 viscosity 1
- 黏性力 viscous force 5
- 黏性系数 coefficient of viscosity 6
- 黏性应力 viscous stress 5
- 黏性流体 viscous fluid 8
- 黏流 viscous flow 85

